

〔Ⅰ〕

(1)

表が6枚であるためには、6の目が出て、6枚の硬貨が全て表を向けばよいから、求める確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{384}$$

となる。

(答) $\frac{1}{384}$

(2)

表が1枚もでないことは全ての硬貨が裏を向くことと同義である。以下、それぞれの目が出た場合に、すべての硬貨が裏を向く確率を求める。

[1] 1の目が出た場合

求める確率は、

$$\frac{1}{2}$$

である。

[2] 2の目が出た場合

求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

である。

[3] 3の目が出た場合

求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

である。

[4] 4の目が出た場合

求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

である。

[5] 5の目が出た場合

求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

である。

[6] 6の目が出た場合

求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

である。

以上[1]から[6]より、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{63}{384} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{63}{384}$

(3)

(2)より、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{63}{384}} = \frac{8}{63}$$

となる。

(答) $\frac{8}{63}$

〔Ⅱ〕

(1)

条件より、 $\triangle APQ$ と $\triangle ABC$ の面積はそれぞれ、

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin \angle BAC$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

である。この面積比について、 $\triangle APQ : \triangle ABC = 1:2$ が成り立つことから、 $AP = 3$ のとき、

$$\triangle APQ : \triangle ABC = 1:2$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot AQ : AB \cdot AC = 1:2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot AP \cdot AQ = AB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot AQ = 4 \cdot 6$$

$$\therefore AQ = 4$$

が得られる。また、 $\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\cos \angle BAC = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$

であるから、 $\triangle APQ$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \angle BAC} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{9}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{46}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{46}}{2}$$

(2)

$AP = p$, $AQ = q$ ($0 < p < 4$, $0 < q < 6$) とおく。(1)と同様にして、

$$\triangle APQ : \triangle ABC = 1:2$$

$$\Leftrightarrow AP \cdot AQ : AB \cdot AC = 1:2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot AP \cdot AQ = AB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow 2pq = 4 \cdot 6$$

$$\therefore p = \frac{12}{q}$$

を得る。したがって、 $\triangle APQ$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \angle BAC} \\ &= \sqrt{p^2 + \frac{12^2}{p^2} - 2 \cdot p \cdot \frac{12}{p} \cdot \frac{9}{16}} \\ &= \sqrt{p^2 + \frac{12^2}{p^2} - \frac{27}{2}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $p^2 > 0$, $\frac{12^2}{p^2} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より、

$$p^2 + \frac{12^2}{p^2} \geq 2\sqrt{p^2 \cdot \frac{12^2}{p^2}} = 24$$

であり、等号成立は $p^2 = \frac{12^2}{p^2}$, すなわち $p = 2\sqrt{3}$ ($\because p > 0$) のときである。このとき、 $q = 2\sqrt{3}$

であり、これは $0 < p < 4$, $0 < q < 6$ を満たす。したがって、求める最小値は、

$$PQ = \sqrt{p^2 + \frac{12^2}{p^2} - \frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{42}}{2}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$a=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9 \\ &= (x-3)(2x^2 - 3x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

であるから, 増減表は以下のようになる。

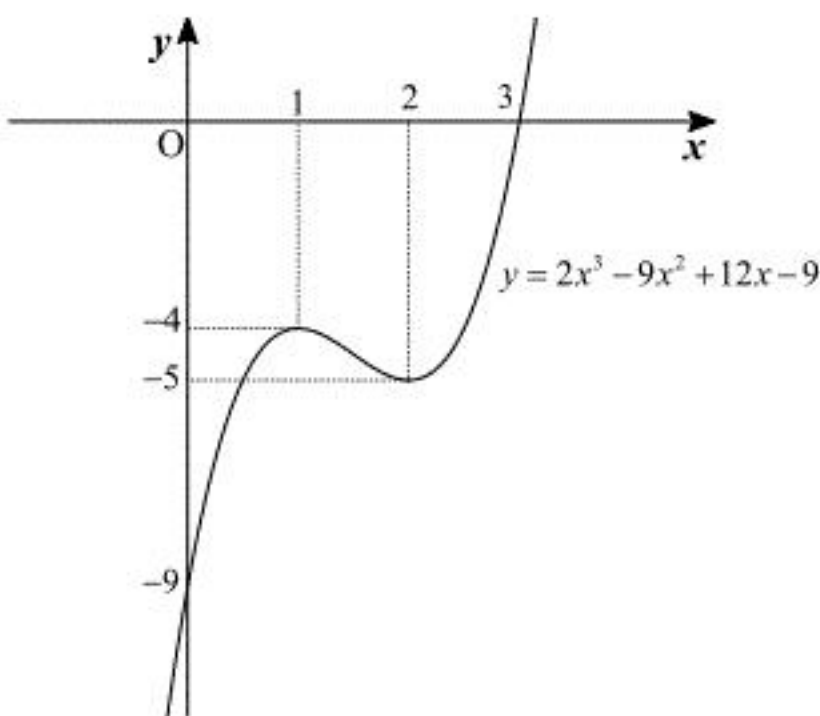
x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

したがって, 極値はそれぞれ,

$$\text{極大値: } f(1) = -4$$

$$\text{極小値: } f(2) = -5$$

となる。また, グラフは以下のようになる。



(答) 極大値: $x=1$ のとき -4

極小値: $x=2$ のとき -5

グラフ: 上図

(2)

$f(x) = (x-3)(2x^2 - 3ax + 3a)$ であることから, 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつ

ためには, $2x^2 - 3ax + 3a = 0$ が 3 以外の異なる 2 つの実数解をもっていればよい。

$2x^2 - 3ax + 3a = 0$ が $x=3$ を解にもたないことから,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^2 - 3a \cdot 3 + 3a &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 18 - 6a &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a &\neq 3 \end{aligned}$$

である。また, $2x^2 - 3ax + 3a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow 9a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3a &> 0 \\ \Leftrightarrow 3a(3a - 8) &> 0 \\ \Leftrightarrow a < 0, \frac{8}{3} < a &< 3, 3 < a \end{aligned}$$

である。以上より求める a の範囲は,

$$a < 0, \frac{8}{3} < a < 3, 3 < a$$

である。

(答) $a < 0, \frac{8}{3} < a < 3, 3 < a$