

【I】

(1)

さいころの目の出方はすべて同様に確からしい。 $M \leq 2$ である為の必要十分条件は、全てのさいころの出た目が1, 2となることである。そのような事象が発生する確率は、

$$\frac{2^4}{6^4} = \frac{1}{81}$$

である。

$$(答) \frac{1}{81}$$

(2)

$M=5$ となる為の必要十分条件は、 $M \leq 5$ かつ $M > 4$ となることである。 $M > 4$ となることは、 $M \leq 4$ となることの否定である。ここで、 $M \leq 4 \Rightarrow M \leq 5$ であるから、 $M=5$ となる確率は、 $M \leq 5$ となる確率から $M \leq 4$ となる確率を引いた値である。この値は、(1)と同様に考えれば、

$$\frac{5^4}{6^4} - \frac{4^4}{6^4} = \frac{41}{144}$$

であると分かる。

$$(答) \frac{41}{144}$$

(3)

$i=1, 2, 3, 4$ について、 $(M, m)=(i+2, i)$ となる確率を考える。この確率は、全てのさいころの出た目が $i, i+1, i+2$ のいずれかである確率から、全てのさいころの出た目が $i, i+1$ のいずれかである、または全てのさいころの出た目が $i+1, i+2$ のいずれかである確率を引いた値に等しい。ここで、全てのさいころの出た目が $i, i+1$ のいずれかである、かつ全てのさいころの出た目が $i+1, i+2$ のいずれかである事象は、全てのさいころの出た目が $i+1$ である事象に等しく、その確率は

$$\frac{1}{6^4}$$

である。これより、全てのさいころの出た目が $i, i+1$ のいずれかである、または全てのさいころの出た目が $i+1, i+2$ のいずれかである確率は、

$$\frac{2^4}{6^4} + \frac{2^4}{6^4} - \frac{1}{6^4} = \frac{31}{1296}$$

であるから、 $(M, m)=(i+2, i)$ となる確率は、

$$\frac{3^4}{6^4} - \frac{31}{1296} = \frac{25}{648}$$

である。 $(M, m)=(i+2, i)$ となる事象は $i=1, 2, 3, 4$ で排反であるから、 $M-m=2$ となる確率は、

$$4 \cdot \frac{25}{648} = \frac{25}{162}$$

である。

$$(答) \frac{25}{162}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$a=0$ のとき,

$$\begin{aligned} 4^x - (a+3) \cdot 2^{x+1} - 8a^2 + 12a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 2) \cdot (2^x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x = 2, 4 \\ \Leftrightarrow x = 1, 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $x = 1, 2$

(2)

$a=2$ のとき,

$$\begin{aligned} 4^x - (a+3) \cdot 2^{x+1} - 8a^2 + 12a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x \cdot (2^x - 10) &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 x が実数のとき常に $2^x > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} 2^x \cdot (2^x - 10) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= \log_2 10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

である。

(答) $x = \frac{1}{s}$

(3)

$t = 2^x$ とおくと,

$$\begin{aligned} 4^x - (a+3) \cdot 2^{x+1} - 8a^2 + 12a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2(a+3)t - 8a^2 + 12a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{t - (a+3)\}^2 - 9a^2 + 6a - 1 &= 0 \end{aligned}$$

である。ただし、 $t > 0$ である。この方程式が x について異なる 2 つの実数解を持つ為の必要十分条件は、 t について異なる 2 つの正の実数解を持つことである。ここで、

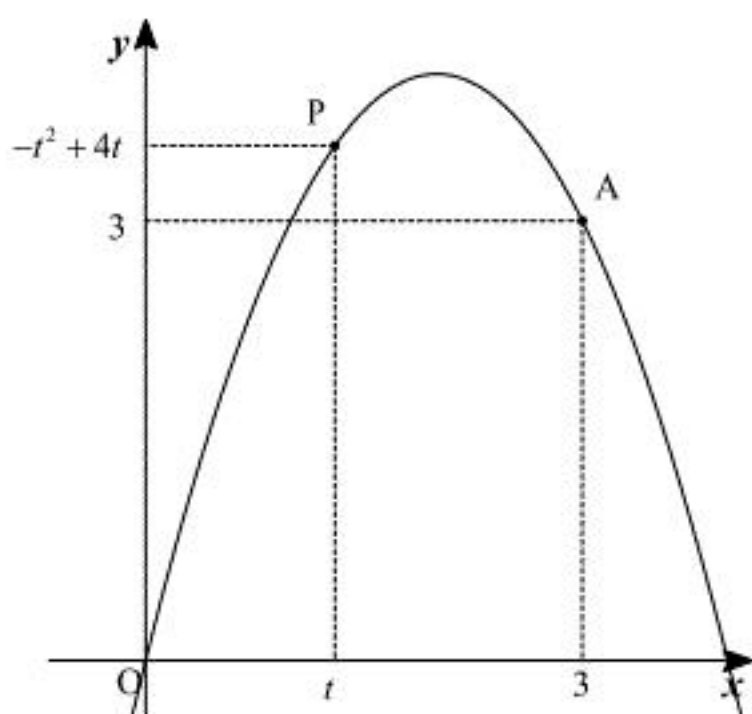
$$\begin{aligned} &\begin{cases} -9a^2 + 6a - 1 < 0 \\ a + 3 > 0 \\ \{0 - (a+3)\}^2 - 9a^2 + 6a - 1 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -(3a-1)^2 < 0 \\ a > -3 \\ -8a^2 + 12a + 8 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a \neq \frac{1}{3} \\ a > -3 \\ 2a^2 - 3a - 2 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a \neq \frac{1}{3} \\ a > -3 \\ (2a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a \neq \frac{1}{3} \\ a > -3 \\ -\frac{1}{2} < a < 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < 2 \end{aligned}$$

である。すなわち、問の条件を満たす為の必要十分条件は $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < 2$ である。

(答) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < a < 2$

〔Ⅲ〕

(1)



$$\overrightarrow{OA} = (3, 3) \neq \vec{0}$$

であるから,

$$OA \perp AP$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3, 3) \cdot (t-3, -t^2+4t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(t-3) + 3(-t^2+4t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(t-2)(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, 3$$

である。これらのうち $0 < t < 3$ を満たすのは、 $t = 2$ のみである。

(答) $t = 2$

(2)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow (3, 3) \cdot (t, -t^2 + 4t) = \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3t + 3(-t^2 + 4t) = \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 15t + \frac{27}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t - \frac{3}{2}\right)\left(t - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \frac{9}{2}$$

である。これらのうち $0 < t < 3$ を満たすのは、 $t = \frac{1}{2}$ のみである。このとき、 $\triangle OAP$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |3 \cdot (-t^2 + 4t) - 3 \cdot t| &= \frac{3}{2} |-t^2 + 3t| \\ &= \frac{3}{2} \left| -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \right| \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{15}{8}$

(3)

$0 < t < 3$ であることに注意すれば、 $\triangle OAP$ の面積が $\frac{21}{8}$ となる為の必要十分条件は、

$$\frac{1}{2} |3 \cdot (-t^2 + 4t) - 3 \cdot t| = \frac{21}{8}$$

$$\Leftrightarrow |t(t-3)| = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow -t(t-3) = \frac{7}{4} \quad (\because 0 < t < 3 \Leftrightarrow t(t-3) < 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 12t + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

であると分かる。

(答) $t = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$