

【I】

(1)

与えられた漸化式を

$$a_{n+2} \cdot a_n = 2(a_{n+1})^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①に $n=1$ を代入して

$$\begin{aligned} a_3 \cdot a_1 &= 2(a_2)^2 \\ \therefore a_3 &= 50 \end{aligned}$$

となる。この結果より、①に $n=2$ を代入して

$$\begin{aligned} a_4 \cdot a_2 &= 2(a_3)^2 \\ \Leftrightarrow 5a_4 &= 2 \cdot 50^2 \\ \therefore a_4 &= 1000 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a_3 = 50, a_4 = 1000$

(2)

①の両辺を $a_n a_{n+1} (\neq 0)$ で割って、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} &= 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n \end{aligned}$$

となる。数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 5$ 、公比 2 の等比数列だから

$$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

となる。

(答) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

(3)

l を自然数とすると、(2)の結果より $\frac{a_{l+1}}{a_l} = 5 \cdot 2^{l-1}$ となる。 l に $1, 2, \dots, n-1$ を代入して辺々掛け

合わせると

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} &= 5^{n-1} \cdot 2^{0+1+\cdots+(n-2)} \\ \Leftrightarrow a_n &= 5^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = 5^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}$

(4)

a_{21} の桁数を k とおくと、 $10^{k-1} \leq a_{21} < 10^k$ が成り立つ。この不等式の各辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} k-1 &\leq \log_{10}(5^{20} \cdot 2^{170}) < k \\ \Leftrightarrow k-1 &\leq 20 + 170 \log_{10} 2 < k \\ \Leftrightarrow k-1 &\leq 20 + 170 \cdot 0.3010 < k \\ \Leftrightarrow k-1 &\leq 71.17 < k \\ \therefore 71.17 &< k \leq 72.17 \end{aligned}$$

となる。この不等式を満たす整数 k は $k=72$ だから、 a_{21} は 72 桁の整数となる。また、

$$a_{21} = 5^{20} \cdot 2^{170} = 10^{20} \cdot 2^{170}$$

であるから、 a_{21} の末尾には 0 が 20 個連続して並ぶ。

(答) 72 桁, 20 個

【Ⅱ】

(1)

FB, BC の長さをそれぞれ s, t とする。図2 の状態と図3 の状態に入っている水の量は同じだから

$$10st = \frac{1}{2}(15 + CP) \cdot ts$$

$$\Leftrightarrow CP = 5$$

と求まる。

(答) $CP = 5$

(2)

$$V = \triangle ABC \cdot FB = \left(\frac{1}{2} \cdot 15t \right) \cdot s = \frac{15}{2}st$$

$$\therefore st = \frac{2}{15}V$$

である。したがって、もともと入っていた水の量は

$$10st = 10 \cdot \frac{2}{15}V = \frac{4}{3}V$$

と表せるから、こぼれた水の量は

$$\frac{4}{3}V - V = \frac{1}{3}V$$

である。

(答) $\frac{1}{3}V$

(3)

円柱の高さを h とおく。円柱の底面積は πr^2 、底面の周の長さは $2\pi r$ だから、円柱の表面積が 54π であることを利用して

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 54\pi$$

$$\therefore h = \frac{27 - r^2}{r} \quad (\because r > 0)$$

と表せる。したがって、 $h > 0$ かつ $r > 0$ より r の取り得る範囲は

$$r^2 < 27$$

$$\therefore 0 < r < 3\sqrt{3}$$

だと分かる。また、円柱の体積 Z は

$$Z = \frac{27 - r^2}{r} \cdot \pi r^2 = -\pi r^3 + 27\pi r$$

と表せる。 Z を r で微分すると

$$\frac{dZ}{dr} = -3\pi r^2 + 27\pi = -3\pi(r - 3)(r + 3)$$

となるから、 $0 < r < 3\sqrt{3}$ における Z の増減表は以下のようになる。

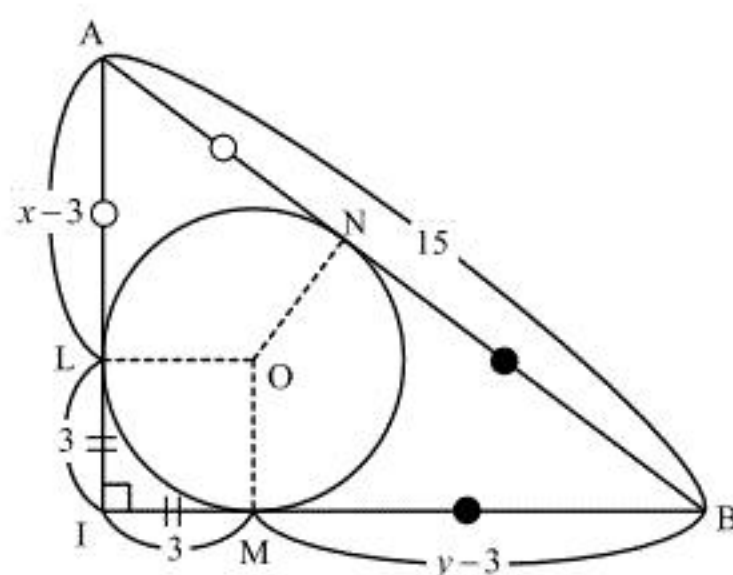
r	0	...	3	...	$3\sqrt{3}$
$\frac{dZ}{dr}$		+	0	-	
Z		$\nearrow$	極大値	$\searrow$	

よって、円柱の体積 Z が最大になるのは $r = 3$ のときである。

(答) $Z = -\pi r^3 + 27\pi r, r = 3$

(4)

$\triangle ABI$ において、円柱の底面と辺 AI, BI, AB との接点をそれぞれ点 L, M, N とおく。また、 $AI = x, BI = y$ ($x > 0, y > 0$) とおく。 $\triangle ABI$ を図示すると以下のようになる。



四角形 OLIM は正方形だから、 $LI = MI = 3$ である。したがって三角形に内接する円の性質より

$$AN = AL = x - 3$$

$$BN = BM = y - 3$$

である。したがって $AB = AN + BN$ だから

$$15 = (x - 3) + (y - 3)$$

$$\therefore y = 21 - x$$

となる。よって、 $\triangle ABI$ は直角三角形だから三平方の定理より

$$x^2 + y^2 = 15^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (21 - x)^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 21x + 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 12)(x - 9) = 0$$

$$\therefore x = 9, 12$$

と求まる。つまり $(x, y) = (9, 12), (12, 9)$ だから、AI の長さは 9 または 12 である。

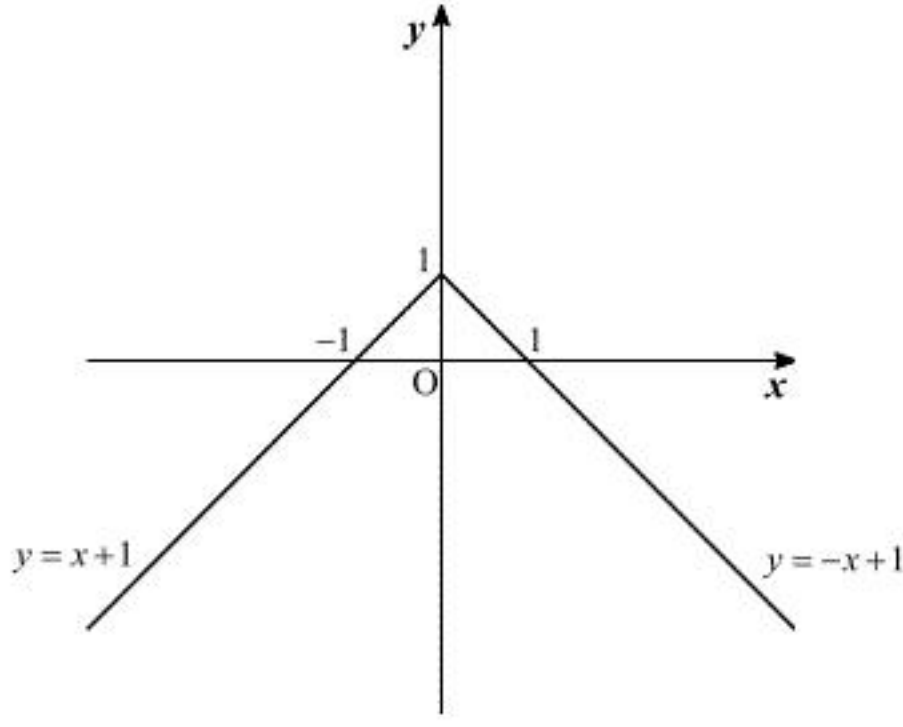
(答) $AI = 9, 12$

【Ⅲ】

(1)

$$-|x|+1=\begin{cases} -x+1 & (x \geq 0) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と場合分けできるから、 G を図示すると以下のようになる。



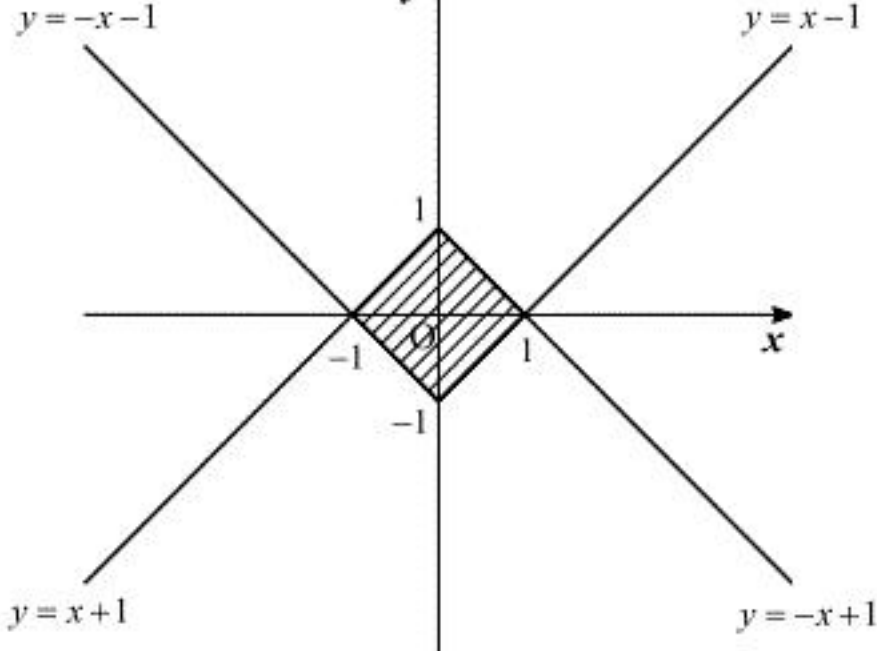
(答) 前図

(2)

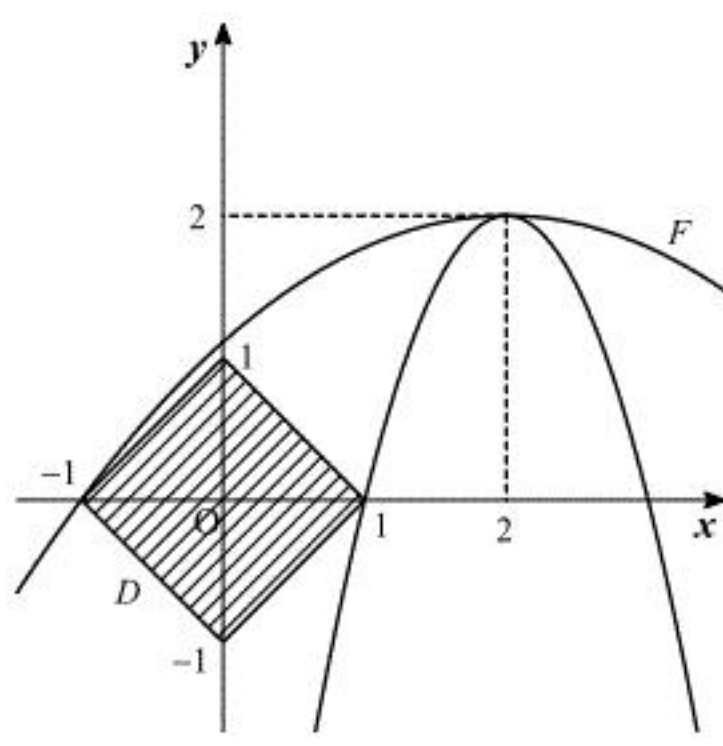
$H: y = |x| - 1$ は以下のように場合分けできる。

$$|x| - 1 = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 0) \\ -x + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

したがって、 D を図示すると以下の斜線部のようになる。ただし境界線を含む。



次に F と D が共有点をもつ条件について考える。 F は頂点 $(2, 2)$ 、軸 $x = 2$ 、上に凸の放物線である。 k を徐々に小さくしていくと考えると、以下の図より F が $(-1, 0)$ または $(0, 1)$ を通るときに F と D は初めて共有点を持ち、そこから F が $(1, 0)$ を通るまでは F と D の共有点は必ず存在すると分かる。さらに k が小さくなったときは、 D は $y > f(x)$ の領域に存在するため共有点は存在しなくなる。



F が $(-1, 0)$ を通るとき k の値は

$$0 = k(-1-2)^2 + 2$$

$$\therefore k = -\frac{2}{9}$$

となる。一方、 F が $(0, 1)$ を通るとき k の値は

$$1 = k(0-2)^2 + 2$$

$$\therefore k = -\frac{1}{4}$$

となる。 $-\frac{1}{4} < -\frac{2}{9}$ だから、 $k = -\frac{2}{9}$ のとき F と D は初めて共有点を持つ。また、 F が $(1, 0)$ を

通るとき k の値は

$$0 = k(1-2)^2 + 2$$

$$\therefore k = -2$$

となる。以上から $-2 \leq k \leq -\frac{2}{9}$ のとき F と D は共有点をもつ。

(答) 前図、 $-2 \leq k \leq -\frac{2}{9}$

(3)(i)

命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真のとき、 D は $y \geq f(x)$ の領域に存在する。(2)よりこのような k の条件は

$$k \leq -2$$

となる。

(答) $k \leq -2$

(ii)

円 $(x+a)^2 + (y-a)^2 = b^2$ の中心を点 C とおくと、点 C の座標は $(-a, a)$ である。命題「 $p \Rightarrow r$ 」

が成り立つとき、 D 上の任意の点と点 C の距離は b より大きい。そこで、まず D 上で最も点 C との距離が小さい点の座標を求める。この点は点 C から直線 $y = x + 1$ におろした垂線の足に一致する。点 C を通り直線 $y = x + 1$ に垂直な直線の方程式は

$$y = -(x+a) + a$$

$$= -x$$

である。したがって、 $y = -x$ と $y = x + 1$ の交点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ が求める座標である。よって、点 C と

点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の距離が b より大きくなればよいから

$$b^2 < \left(-a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 < 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

となる。ここで $a - \frac{1}{2} \leq 0$ と仮定すると、点 C が領域 D の内部に含まれてしまい不適である。

つまり $a - \frac{1}{2} > 0$ であり、 b は正の定数だから求める条件は

$$0 < b < \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) \quad \text{かつ} \quad a > \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $0 < b < \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) \quad \text{かつ} \quad a > \frac{1}{2}$

(4)

まず、 $k = -\frac{2}{5}$ のとき $x \leq 0$ の範囲で F, H の交点を求める。 $y = -\frac{2}{5}(x-2)^2 + 2$ と $y = -x - 1$ を

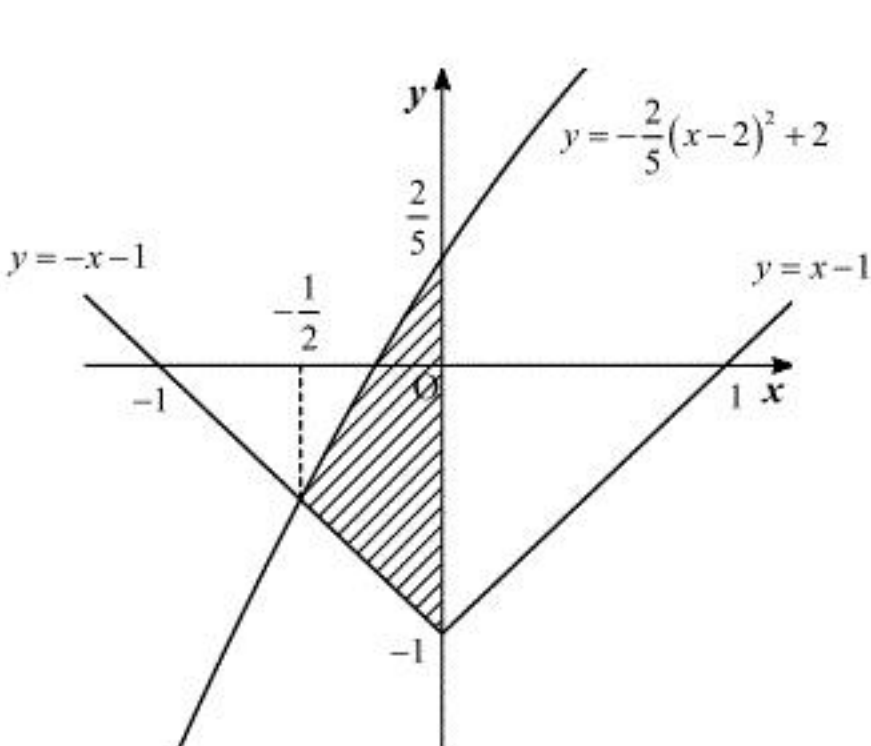
連立して

$$-x - 1 = -\frac{2}{5}(x-2)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-7) = 0$$

となる。 $x \leq 0$ より交点の x 座標は $-\frac{1}{2}$ である。よって求める面積は、以下の図の斜線部の面積に等しくなる。



上図より、求める面積 S は

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left\{ -\frac{2}{5}(x-2)^2 + 2 - (-x-1) \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{5} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^2 - 13x - 7) dx$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 - 7x \right]_{-\frac{1}{2}}^0$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{13}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 7 \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{43}{120}$$

となる。

(答) $S = \frac{43}{120}$