

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	1	4	1	0	0	7	7	5	1
	コ	サ	シ	ス					
	3	3	9	5					
(2)	セ	ソ	タ	チ	ツ				
	2	1	2	1	2				
	テ	ト	ナ	ニ	ヌ				
	－	2	9	1	0				

【解説】

(1)

①より、

$$n = 100 - 7m \qquad \cdots \text{②}$$

であるから、 m が正の整数のとき n は整数であることがわかる。したがって、 n が正となるような正の整数 m の個数を求めればよい。条件を満たす m の値は、

$$\begin{aligned} n &> 0 \\ \Leftrightarrow 100 - 7m &> 0 \\ \Leftrightarrow m &< \frac{100}{7} = 14.2857\ldots \end{aligned}$$

$$\therefore m = 1, 2, 3, \dots, 14 \quad (\because m \text{ は正の整数})$$

であるから、格子点 (m, n) の個数は14である。①を満たす格子点 (m, n) の x 座標と y 座標の積 mn は、②より、

$$mn = m(100 - 7m) = 100m - 7m^2$$

である。これを変形すると、

$$mn = -7\left(m - \frac{50}{7}\right)^2 + \frac{2500}{7}$$

となるから、 mn が最大となるとき $\left(m - \frac{50}{7}\right)^2$ が最小になる。これを最小にする正の整数 m は

$\frac{50}{7} = 7 + \frac{1}{7}$ に数直線上での距離が最も近い正の整数、すなわち $m = 7$ である。このとき、②より $n = 51$ であるから、 mn が最大となるのは $m = 7, n = 51$ のときである。また、

$$\sum_{m=1}^{14} (100m - 7m^2) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot 14 \cdot 15 \cdot 29 = 3395$$

である。

(2)

方程式の左辺を $f(x)$ とすると $f(2) = 0$ を満たすから、因数定理より、

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 5)$$

となる。したがって、 $f(x) = 0$ の解は、

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^2 - 2x + 5) &= 0 \\ \therefore x &= 2, 1 \pm 2i \end{aligned}$$

となる。いま、 $f(x) = 0$ の解 α, β, γ のうち、 α は実数であり、 β の虚部は γ の虚部より小さいから、

$$\alpha = 2, \beta = 1 - 2i, \gamma = 1 + 2i$$

である。また、3次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -(-4) = 4 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 9 \\ \alpha\beta\gamma = -(-10) = 10 \end{cases}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 4^2 - 2 \cdot 9 = -2 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

と求められる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

〔Ⅱ〕	ア									
	4									
(1)	イ	ウ	エ							
	－	2	4							
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ				
	9	8	2	0	1	6				
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	8	2	4	4	6	－	3	2	9	

〔解説〕

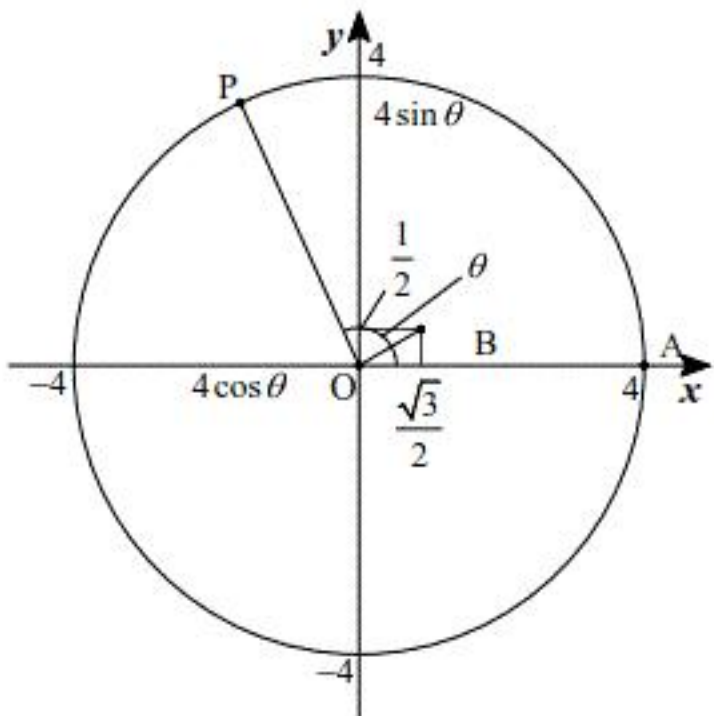
点 P は半径 4 の円上にあるから、 $OP=4$ であり、P の座標は、

$$(4\cos\theta, 4\sin\theta)$$

である。

(1)

以下に、円 C および点 A, B, P を図示する。



点 B の座標は、 $\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$ と表せるから、 $OB=1$ で $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$ である。したがって、

$$\angle BOP=\angle AOP-\angle AOB=\theta-\frac{\pi}{6}$$

となる。 $OP=4$, $OB=1$ であるから、 $\triangle OBP$ の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OP\sin\angle BOP=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

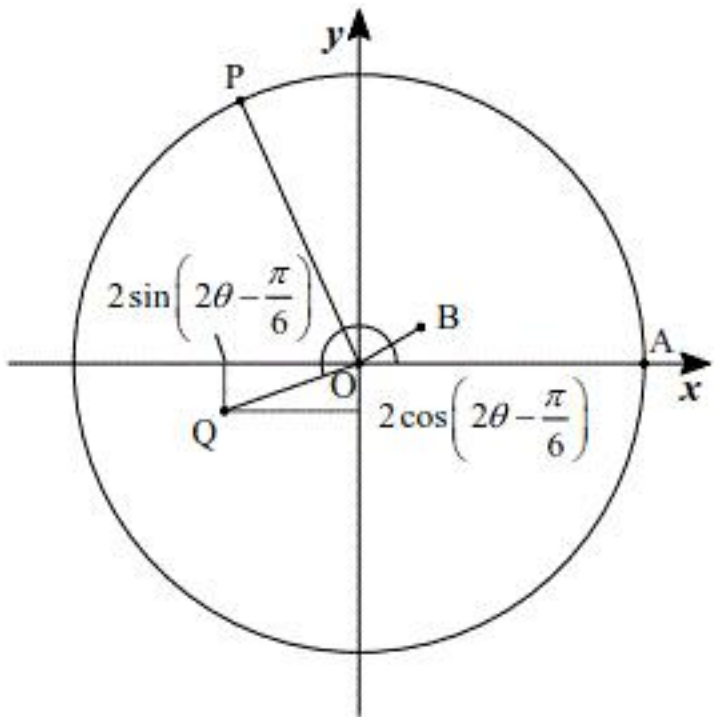
である。 S が最大となるのは、 $\frac{\pi}{6}<\theta\leq\pi$ より $0<\theta-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5}{6}\pi$ であるから、

$$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi$$

のときである。

(2)

以下に点 Q を示す。



$Q\left(2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right), 2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ であるから、 $OQ=2$ である。ここで、上図より、

$$\angle BOQ=\angle AOQ-\angle AOB=\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}=2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから、 $\triangle OBQ$ に余弦定理と 2 倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} BQ^2 &= OB^2 + OQ^2 - 2OB\cdot OQ\cos\angle BOQ \\ &= 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 5 - 4\left\{2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) - 1\right\} \\ &= 9 - 8\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。また、上図より、

$$\angle POQ=\angle AOQ-\angle AOP=\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)-\theta=\theta-\frac{\pi}{6}$$

であるから、 $\triangle OPQ$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} QP^2 &= OQ^2 + OP^2 - 2OQ\cdot OP\cos\angle POQ \\ &= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 20 - 16\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\angle BOP=\theta-\frac{\pi}{6}$ であるから、 $\triangle OBP$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} PB^2 &= OP^2 + OB^2 - 2OP\cdot OB\cos\angle BOP \\ &= 4^2 + 1^2 - 2\cdot 4\cdot 1\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 17 - 8\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=X$ とおくと、

$$\begin{aligned} BQ^2 + QP^2 + PB^2 &= 9 - 8\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) + 20 - 16\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) + 17 - 8\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -8X^2 - 24X + 46 \end{aligned}$$

となる。 $BQ^2 + QP^2 + PB^2$ の式を変形すると、

$$BQ^2 + QP^2 + PB^2 = -8\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 + 64$$

となり、 $0<\theta-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5}{6}\pi$ より $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq X<1$ であるから、 $BQ^2 + QP^2 + PB^2$ は $X=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最

大値をとる。このとき、

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0<\theta-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5}{6}\pi)$$

$$\therefore\theta=\pi$$

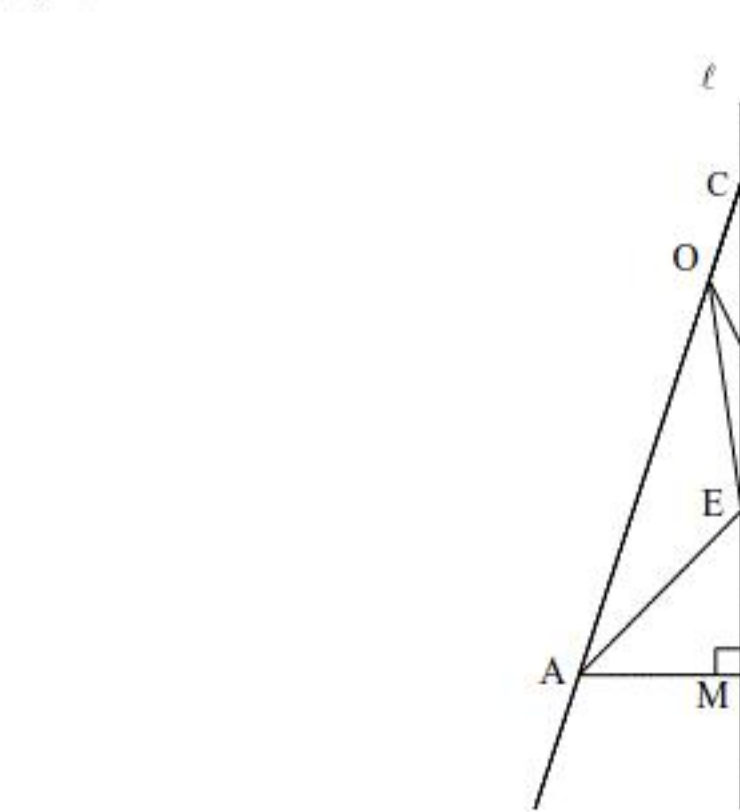
である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	2	1	0	8	2	－	1	4	1	5
シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
8	2	2	3	1	4	1	6	1	0	2

〔解説〕



仮定より $|\vec{a}|^2=16, |\vec{b}|^2=18$ であり、 $|\vec{a}|>0, |\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3\sqrt{2}$ である。また、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ であるから

$$\cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{12}{4\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

が得られる。よって、 $\triangle AOB$ に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB \\ &=16+18-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &=10 \\ \therefore AB &=\sqrt{10}\ (\because AB>0) \end{aligned}$$

となる。次に点 M は辺 AB の中点であるから、 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ である。よって

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-s\vec{a}=\frac{1-2s}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\vec{b}$ であり、直線 CM と直線 AB が垂直であることから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} &=0 \\ \Leftrightarrow\left(\frac{1-2s}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot(-\vec{a}+\vec{b}) &=0 \\ \Leftrightarrow\frac{2s-1}{2}|\vec{a}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 &=0 \\ \Leftrightarrow 8(2s-1)-12s+9 &=0 \\ \therefore s &=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $CO:OA=\frac{1}{4}:1=1:4$ となり、 $\triangle COM$ と $\triangle CAM$ は底辺の長さの比が

$1:(1+4)$ で、高さが等しいから、面積比は底辺の長さの比に等しく、

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{CO}{CA}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

となる。

次に、上の結果から $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{OC}=-\frac{1}{4}\vec{a}$ となるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE} \\ &= \overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{OC}+t(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{t-1}{4}\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{3t-1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで、OA の中点を N とする。E は $\triangle OAB$ の外心であるので、N は E から OA に下ろした垂線の足でもあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EN} &=0 \\ \Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OE}) &=0 \\ \Leftrightarrow\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}-\frac{1}{2}t\vec{b}\right) &=0 \\ \Leftrightarrow 12(1-t)-6t &=0 \\ \therefore t &=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

が得られる。

このとき、 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ となるので、

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} EM &=|\overrightarrow{EM}| \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{12}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

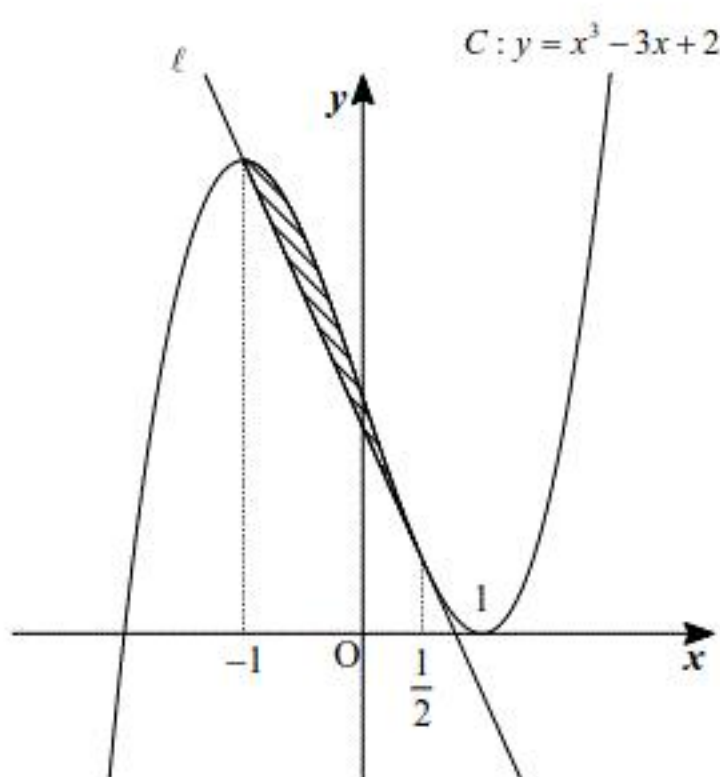
であるとわかる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
3	3	－	1	1	3	2	2
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
－	9	4	7	－	1	2	7

〔解説〕



$f(x) = x^3 - 3x + 2$ より $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。また、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(x+1)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 1 \end{aligned}$$

であるから、 $a = -1, b = 1$ である。よって、 $-1 < x < 1$ において $f'(x) < 0$ であり、この区間で $f(x)$ は常に減少する。また、これらを踏まえると $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これと $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ から、 $f(-1)$ は $f(x)$ の極大値ではあるが最大値ではない。

また、曲線 C と x 軸の共有点の個数は方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数に等しく、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1 \end{aligned}$$

より、その個数は2である。

次に、 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ より、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8} \\ \therefore y &= -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 C と ℓ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x) - \left(-\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積は上図の斜線部の面積であり、その値は

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left\{ f(x) - \left(-\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}\right) \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x+1) dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{81}{64} + \frac{27}{16} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

(1)		ア	イ	ウ	エ
		1	6	8	0
(2)	(i)	オ	カ	キ	
		2	8	0	
	(ii)	ク	ケ	コ	
		3	7	8	
	(iii)	サ	シ	ス	セ
		1	9	1	8
(3)	(i)	ソ	タ	チ	
		3	2	0	
	(ii)	ツ	テ	ト	
		9	1	9	

〔解説〕

(1)

9 個の玉から 3 個を選んで白い袋に入れ、残った 6 個から 3 個を選んで赤い袋に入れ、残った 3 個を青い袋に入れると考えて、玉の入れ方は、

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 1680 \text{ (通り)}$$

となる。

(2)

(i)

(1)の場合において 3 つの袋の区別をなくすと、(1)では重複して 3! 通り数えていることになるから、求める入れ方は、

$$\frac{1680}{3!} = 280 \text{ (通り)}$$

となる。

(ii)

9 個の玉を 5 個、2 個、2 個に分けると考える。ここで、2 個の玉を入れる 2 つの袋はお互いに区別しないことに注意すると、求める玉の入れ方は、

$${}_9C_5 \times \frac{{}_4C_2}{2!} = 378 \text{ (通り)}$$

となる。

(iii)

どの袋にも 2 個以上の玉が入るような 9 個の玉の入れ方は、(5 個、2 個、2 個)、(3 個、3 個、3 個)、(4 個、3 個、2 個)の 3 つの場合である。ここで 9 個の玉を 4 個、3 個、2 個に分ける分け方は、

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 = 1260 \text{ (通り)}$$

である。3 個、3 個、3 個に分ける分け方は (i) より 280 通り、5 個、2 個、2 個に分ける分け方は (ii) より 378 通りあるから、どの袋にも 2 個以上の玉が入るような玉の入れ方は、

$$280 + 378 + 1260 = 1918 \text{ (通り)}$$

となる。

(3)

(i)

求める確率を p とする。奇数の袋を選んだ時に取り出した 2 つの玉の和が 3 の倍数となる奇数の組は、(1, 5)、(3, 9)、(5, 7) の 3 組であり、奇数の袋から 2 つの玉を取り出す方法は、

${}_3C_2 = 10$ 通りである。初めに奇数の袋を選ぶ確率が $\frac{1}{2}$ であることと合わせて、求める確率は、

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

となる。

(ii)

偶数の袋を選び、かつ取り出した 2 つの玉に書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を q とする。数の和が 3 の倍数となる 2 つの偶数の組は、(2, 4)、(4, 8) の 2 組であり、偶数の袋から 2 つの玉を取り出す方法は ${}_4C_2 = 6$ 通りある。したがって、初めに偶数の袋を選ぶ確率が $\frac{1}{2}$ であ

ることと合わせて、 $q = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ となる。以上より、求める条件付き確率は、

$$\frac{p}{p+q} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20} + \frac{1}{6}} = \frac{9}{19}$$

となる。

〔VI〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	2	2	2	2	1	2	3	1
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
3	2	7	－	3	2	3	1	2

〔解説〕

関数 $f(x)$ を、

$$f(x)=x\sqrt{1-x^2} \quad (0\leq x\leq 1)$$

とし、座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、 $0<x<1$ において、積の微分公式を用いて

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

である。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
$f'(x)$		+	0	－	
$f(x)$	0		極大		0

ここで、

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

である。したがって、 $f(x)$ は、 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ において極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

直線 $y=x$ を ℓ とする。

$$x-f(x)=x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{x\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\left\{1^2-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^3}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

であるから、 $0<x<1$ において $x^3>0$ かつ $1+\sqrt{1-x^2}>0$ より、 $x-f(x)$ の値はつねに正である。

直線 m は、 C の接線であり、 ℓ と垂直であるとする。 m と C の接点の x 座標を a とすると、

$$\begin{aligned} 1\cdot f'(a) &= -1 \Leftrightarrow \frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}} = -1 \\ &\Leftrightarrow 2a^2-1 = \sqrt{1-a^2} \\ &\Leftrightarrow (2a^2-1)^2 = 1-a^2 \quad \text{かつ} \quad 2a^2-1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2\left(a^2-\frac{3}{4}\right) = 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0 < x < 1) \end{aligned}$$

である。

不定積分 $\int f(x)dx$ を求める。 $1-x^2=t$ とおくと、両辺を t で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1-x^2) &= 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2) \cdot \frac{dx}{dt} = 1 \\ \therefore -2x \cdot \frac{dx}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

となるから、置換積分を行うと

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \int x\sqrt{t} \cdot \frac{dx}{dt}dt = \int \left(-2x \cdot \frac{dx}{dt}\right) \frac{-\sqrt{t}}{2}dt = \int \frac{-\sqrt{t}}{2}dt = \frac{-t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + D = \frac{-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + D$$

となる。ここで、 D は積分定数である。

$0<x<1$ において $x-f(x)$ の値はつねに正であるから、 $0\leq x\leq 1$ において C と ℓ の位置関係は以下のようになる。

x	0	…	a	…	1
C と ℓ の位置関係	交わる	C より ℓ が上			

よって、 C と ℓ 、および直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積は

$$\int_0^a \left(x-x\sqrt{1-x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left\{\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{24}\right) - \left(0 + \frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{1}{12}$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	2	2	1	－	2	2	2	1	－	1	2	－
セ	ソ	タ	チ	ツ								
2	2	3	4	5								

〔解説〕

$C: y=f(x)=x(\log x)^2 \ (x>0)$

について考える。

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \ (\because x>0)$

であるから、 C と x 軸との共有点は $(1, 0)$ のみである。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$f'(x)=(\log x)^2+2x(\log x)\cdot\frac{1}{x}=(\log x)^2+2\log x$

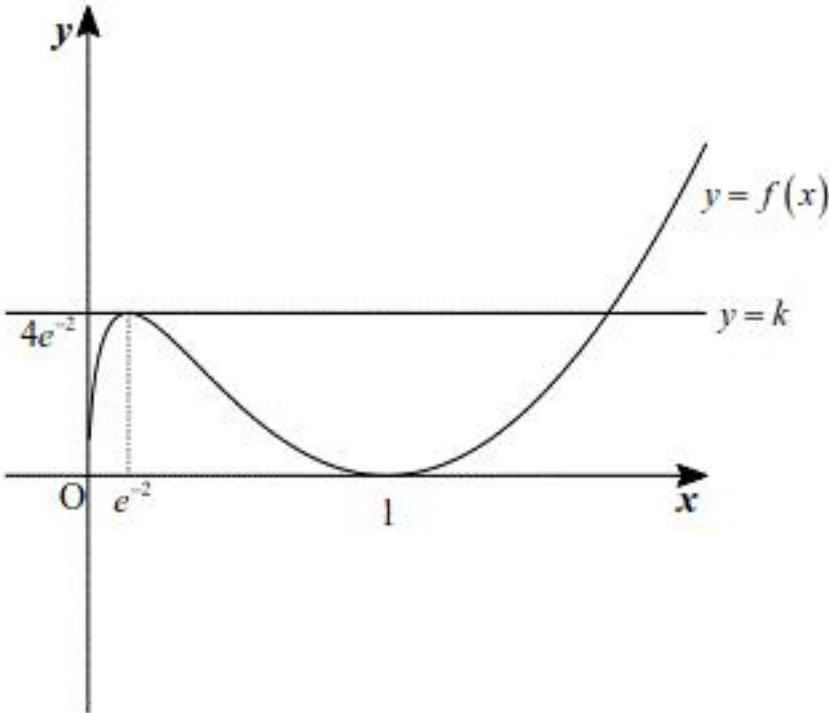
であり、

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (\log x)(\log x+2)=0$

となるから、 $f'(x)=0$ となる x の値は大きい順に $1, e^{-2}$ である。 $f(x)$ の増減表をかくと次のようになる。

x	0	...	e^{-2}	...	1	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	－	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	(∞)

$\lim_{x\rightarrow+0} f(x)=0$ より、 $f(x)$ のグラフは次のようになる。



$k=f(e^{-2})$ とする。 $f(x)=k$ の解の個数は、 $y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の個数に等しいから、上のグラフより2個である。 $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ は、

$f''(x)=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}(\log x+1)$

である。

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \log x=-1$

であるから、 $f''(x)=0$ となる x の値は e^{-1} である。 $x>e^{-1}$ のとき、 $f''(x)>0$ であるから、 C は下に凸である。

$I=\int_{e^{-1}}^1 f(x)dx$

とおく。 x が $\frac{x^2}{2}$ の導関数であることに注意して部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} I &= \int_{e^{-1}}^1 x(\log x)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2(\log x)^2 \right]_{e^{-1}}^1 - \int_{e^{-1}}^1 \left\{ \frac{1}{2}x^2 \times 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \int_{e^{-1}}^1 x \log x dx \end{aligned}$$

となり、計算を続けると、

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{-2}}{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 \log x \right]_{e^{-1}}^1 + \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_{e^{-1}}^1 \\ &= \frac{1}{4}(1-5e^{-2}) \end{aligned}$$

となる。