

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ				
	－	4	7	5				
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
	1	6	3	－	3	2	2	
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
	3	2	3	1	5	3	1	5

【解説】

(1)

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i-6}{1+4} = \frac{-4+7i}{5}$$

である。

(2)

方程式

$$|x+1|+|3x-2|=7 \quad \cdots \text{①}$$

について、以下のように場合分けして考える。

[1] $x < -1$ のとき

$x+1 < 0, 3x-2 < 0$ であるから

$$|x+1|+|3x-2| = -(x+1)-(3x-2) = -4x+1$$

である。よって、①は

$$-4x+1=7$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

となり、これは $x < -1$ を満たすため①の解である。

[2] $-1 \leq x < \frac{2}{3}$ のとき

$x+1 \geq 0, 3x-2 < 0$ であるから

$$|x+1|+|3x-2| = (x+1)-(3x-2) = -2x+3$$

である。よって、①は

$$-2x+3=7$$

$$\therefore x = -2$$

となるが、これは $-1 \leq x < \frac{2}{3}$ を満たさないので①の解として不適である。

[3] $\frac{2}{3} \leq x$ のとき

$x+1 > 0, 3x-2 \geq 0$ であるから

$$|x+1|+|3x-2| = (x+1)+(3x-2) = 4x-1$$

である。よって、①は

$$4x-1=7$$

$$\therefore x = 2$$

となり、これは $\frac{2}{3} \leq x$ を満たすので①の解である。

以上[1], [2], [3]より、①の解は小さい順に $-\frac{3}{2}$ と 2 である。

(3)

$15^{xy} = 27^x$ の両辺の常用対数をとって整理すると

$$\log_{10} 15^{xy} = \log_{10} 27^x$$

$$\Leftrightarrow xy \log_{10} 15 - x \log_{10} 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy (\log_{10} 3 + \log_{10} 5) - 3x \log_{10} 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \{ (y-3) \log_{10} 3 + y \log_{10} 5 \} = 0$$

となる。ここで、 $xy \neq 0$ より $x \neq 0$ であるから、

$$(y-3) \log_{10} 3 + y \log_{10} 5 = 0$$

となるので、

$$a = y-3, b = y$$

である。このとき

$$(y-3) \log_{10} 3 + y \log_{10} 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_{10} 3 + \log_{10} 5) y = 3 \log_{10} 3$$

であり、 $\log_{10} 3 + \log_{10} 5 \neq 0$ であるから

$$y = \frac{3 \log_{10} 3}{\log_{10} 3 + \log_{10} 5} = \frac{3 \log_{10} 3}{\log_{10} 15}$$

となる。また、 $27^x = 125^y$ の両辺の常用対数をとって整理すると

$$\log_{10} 27^x = \log_{10} 125^y$$

$$\Leftrightarrow 3x \log_{10} 3 = 3y \log_{10} 5$$

$$\Leftrightarrow x \log_{10} 3 = y \log_{10} 5$$

であり、 $\log_{10} 3 \neq 0$ であるから

$$x = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} y = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{3 \log_{10} 3}{\log_{10} 15} = \frac{3 \log_{10} 5}{\log_{10} 15}$$

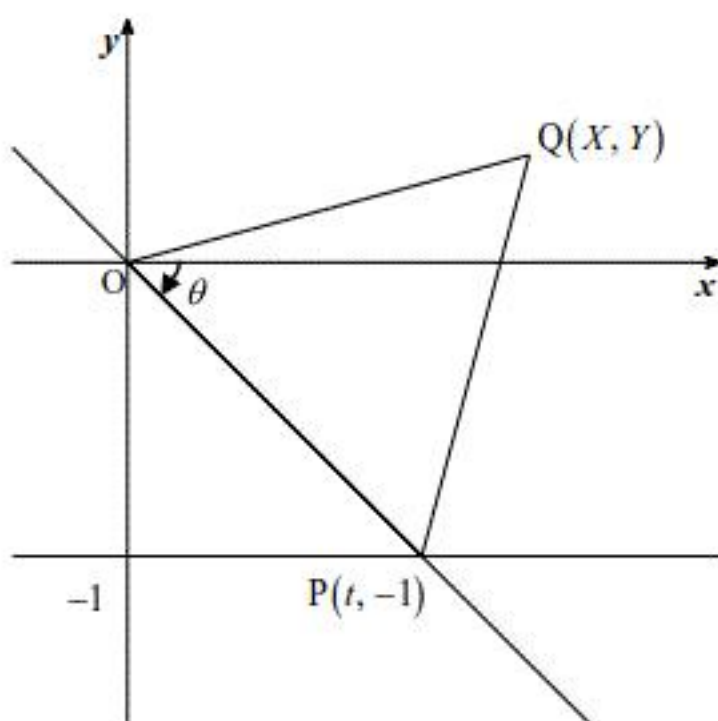
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
6	3	－	8	4	9	8	2	9
コ	サ	シ	ス	セ				
3	1	3	2	3				

〔解説〕



$P(t, -1)$ より,

$$OP = \sqrt{t^2 + (-1)^2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = OP \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ -1 = OP \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{cases}$$

となる。また、 $\theta' = \theta + \frac{\pi}{3}$ より、三角関数の加法定理を用いて

$$\cos \theta' = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = \frac{t + \sqrt{3}}{2\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$\sin \theta' = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}t - 1}{2\sqrt{t^2 + 1}}$$

となる。 $\triangle OPQ$ は正三角形であるから、 $OQ = OP = \sqrt{t^2 + 1}$ より、

$$X = \sqrt{t^2 + 1} \cos \theta' = \frac{t + \sqrt{3}}{2}$$

$$Y = \sqrt{t^2 + 1} \sin \theta' = \frac{\sqrt{3}t - 1}{2}$$

である。2点 $(0, 1), \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ を通る直線 ℓ の方程式は、

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow 3x + y = 1$$

であるから、 Q が ℓ 上にあるとき、

$$3X + Y = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{t + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}t - 1}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})t = 3 - 3\sqrt{3}$$

$$\therefore t = 3 - 2\sqrt{3}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ			
	3	8			
(2)	ウ	エ			
	1	4			
(3)	オ	カ	キ		
	5	1	6		
(4)	ク	ケ	コ		
	7	1	6		
(5)	サ	シ	ス		
	5	3	2		
(6)	セ	ソ	タ	チ	ツ
	1	5	1	2	8
(7)	テ	ト			
	3	7			

【解説】

(1)

コインを1回投げたときの表、裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である。コインを3回投げたとき、Pの座標が(2, 1)であるのは、表が2回、裏が1回出る場合だから、求める確率は、

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

である。

(2)

コインを4回投げ、Pが直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 上にあるとき、コインの表が出る回数を a 回、裏が出る回数を b 回とすると

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b=\frac{1}{2}a+\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、このとき表が1回、裏が3回出るから、求める確率は、

$${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

である。

(3)

コインを6回投げたとき、Pの座標が(3, 3)であるのは、表が3回、裏が3回出る場合だから、求める確率は、

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

である。

(4)

コインを7回投げたとき、Pの座標が(2, 5)であるのは、表が2回、裏が5回出る場合だから、その確率は、

$${}_7C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=21\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{32}=\frac{21}{128}$$

である。同様に、コインを7回投げたとき、Pの座標が(4, 3)であるのは、表が4回、裏が3回出る場合だから、その確率は、

$${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=35\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}=\frac{35}{128}$$

である。これら2つの事象は互いに背反であるから、求める確率は、

$$\frac{21}{128}+\frac{35}{128}=\frac{7}{16}$$

となる。

(5)

コインを6回投げたとき、Pの座標が(3, 3)である確率は、(3)より $\frac{5}{16}$ である。また、コインをさらに2回投げたとき、Pの座標が(4, 4)であるのは、さらに表が1回、裏が1回出る場合だから、その確率は、

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

となる。

(6)

コインを8回投げたとき、Pの座標が(4, 4)であるのは、表が4回、裏が4回出る場合だから、その確率は

$${}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$$

である。そのうち、途中で(3, 3)を通る確率は(5)より $\frac{5}{32}$ であるから、求める確率は

$$\frac{35}{128}-\frac{5}{32}=\frac{15}{128}$$

である。

(7)

コインを8回投げたとき、Pの座標が(4, 4)である事象を A 、コインを6回投げたときの点Pの座標が(3, 3)以外である事象を B とすると、求める確率は $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ と表せる。コインを8回投げたときのPの座標が(4, 4)である確率は

$$P(A)=\frac{35}{128}$$

であり、(6)より

$$P(A\cap B)=\frac{15}{128}$$

である。したがって、求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{128}}{\frac{35}{128}}=\frac{3}{7}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
7	1	2	－	1	4	2	3	6	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
1	2	2	5	2	9	8			

〔解説〕

C の接点の座標を $(t, -t^2 + 3t - 3)$ とおくと、 $f'(x) = -2x + 3$ より、 C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (-2t + 3)(x - t) - t^2 + 3t - 3 \\ &= (-2t + 3)x + t^2 - 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 ℓ_1, ℓ_2 は $(0, 1)$ を通るので、 $\textcircled{1}$ に $(0, 1)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} t^2 &= 4 \\ \therefore t &= \pm 2 \end{aligned}$$

である。よって、 ℓ_1, ℓ_2 の方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \ell_1 : y &= 7x + 1 \\ \ell_2 : y &= -x + 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $t = 2$ を $(t, -t^2 + 3t - 3)$ に代入して、 $A(2, -1)$ とわかる。次に、 ℓ_3 は ℓ_2 に垂直なので傾きが 1 であり、 $A(2, -1)$ を通るから

$$y = (x - 2) - 1 \Leftrightarrow y = x - 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。 ℓ_1, ℓ_3 の交点の x 座標は、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ の連立方程式を解くことにより、

$$\begin{aligned} 7x + 1 &= x - 3 \\ \therefore x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となり、交点の y 座標は

$$y = -\frac{2}{3} - 3 = -\frac{11}{3}$$

である。次に、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ を連立すると、

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x - 3 &= x^2 - 3ax - 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3(a + 1)x + 2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

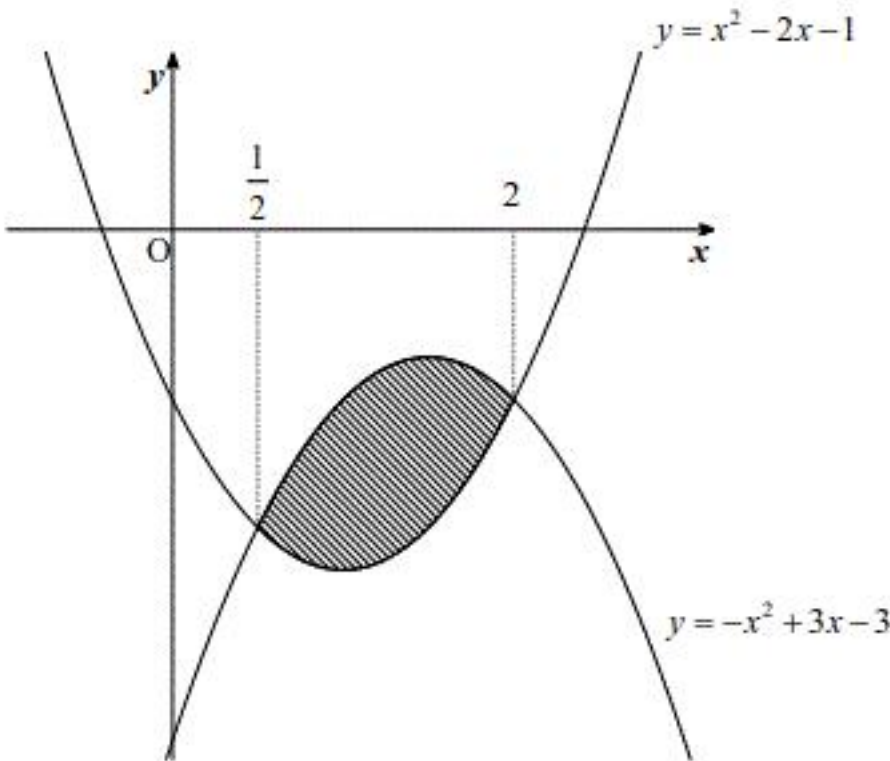
となる。 C と D が相異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、 $\textcircled{4}$ の判別式を D_1 とすると、 $D_1 > 0$ が成り立つことである。よって、

$$\begin{aligned} D_1 &> 0 \\ \Leftrightarrow 9(a + 1)^2 - 16 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)^2 &> \frac{16}{9} \\ \Leftrightarrow a + 1 < -\frac{4}{3}, a + 1 &> \frac{4}{3} \\ \therefore a < -\frac{7}{3}, a &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。 $a = \frac{2}{3}$ を $\textcircled{4}$ に代入すると、 C と D の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2 &= 0 \\ (2x - 1)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, 2 \end{aligned}$$

とわかる。よって、 I は下図の斜線部分の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ (-x^2 + 3x - 3) - (x^2 - 2x - 1) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 (-2x^2 + 5x - 2) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 -2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2) dx \\ &= \frac{2}{6} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

[V]

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	9	0	1	3	6	1	2	7	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
2	－	7	9	1	6	2	4		

[解説]

座標平面上において、連立方程式

$$x>0, y<0, y>\frac{1}{7}x-14 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

で表される領域 D に含まれる格子点の個数を求める。 x を整数とすると、格子点 $(x, -1)$ が D に含まれるための条件は、 $\textcircled{1}$ より

$$(x, -1) \in D \Leftrightarrow x>0, -1>\frac{1}{7}x-14 \Leftrightarrow 0<x<91 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 90 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、この条件を満たす x の最小値を K 、最大値を L とするとき、

$$K=1, L=90$$

である。数列 $\{a_n\} (1 \leq n \leq L)$ を

a_n : 直線 $x=n$ 上にあり D に含まれる格子点の個数

と定めるとき、直線 $x=n$ を ℓ_n とすると、 $\textcircled{1}$ より

$$(x, y) \in \ell_n \cap D \Leftrightarrow x=n, y<0, y>\frac{1}{7}n-14 \Leftrightarrow x=n, \frac{1}{7}n-14<y<0$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = (0 < m < 14 - \frac{1}{7}n \text{ を満たす整数 } m \text{ の個数})$$

となる。したがって、 a_n の値は以下の表のようにまとめられる。

n の範囲	$m < 14 - \frac{1}{7}n$ を満たす最大の整数	a_n の値
$1 \leq n \leq 6$	13	13
$7 \leq n \leq 13$	12	12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$7k \leq n \leq 7k+6$ ($1 \leq k \leq 12$)	$13-k$	$13-k$

したがって、

$a_1=13$ であり、 $a_n=13$ である項は 6 個

$a_7=12$ であり、 $a_n=12$ である項は 7 個

であることがわかる。 $7k < L (=90)$ を満たす整数 k の最大値を M とすると

$$7 \cdot 12 = 84 (< L), \quad 7 \cdot 13 = 91 (> L)$$

より、 $M=12$ である。数列 $\{b_k\} (1 \leq k \leq M)$ を

$$b_k = 7a_{7k}$$

と定めるとき、上表より $a_{7k} = 13-k (1 \leq k \leq M)$ となることから

$$b_k = 7(13-k) = -7k + 91 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

である。 D に含まれる格子点の個数 N は、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ および上表より

$$N = \sum_{\ell=K}^L a_{\ell} = 6a_1 + \sum_{k=1}^{12} b_k = 6 \cdot 13 + \sum_{k=1}^{12} (-7k + 91) = 78 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (84 + 7) = 624$$

と求まる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
8	1	－	2	4	1	8	2	－	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
2	4	2	1	2	5	1	6		

〔解説〕

$f(x)=\left(1-e^{-2x-2}\right)^2$ であるとき

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}e^{-2x-2}=\infty,\lim_{x\rightarrow\infty}e^{-2x-2}=0$$

であるから、

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\infty,\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=1$$

となる。ここで、 $u=e^{-2x-2}$ とおくと

$$\frac{du}{dx}=-2e^{-2x-2}=-2u$$

となる。 $f(x)$ の導関数 $\frac{df}{dx}$ 、および第2次導関数 $\frac{d^2f}{dx^2}$ を u の式で表すと、 $f(x)=(1-u)^2$ より

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}&=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=-2(1-u)\cdot(-2u)\\&=4u(1-u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\\&=\frac{d}{du}\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{d}{du}\left(4u(1-u)\right)\cdot\frac{du}{dx}\\&=4(1-2u)\cdot(-2u)\\&=8u(2u-1)\end{aligned}$$

である。 $\frac{df}{dx}=0$ となる x の値を α とすると、 $u=e^{-2x-2}>0$ より

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}&=0\\&\Leftrightarrow u=1\\&\Leftrightarrow e^{-2x-2}=1\\&\Leftrightarrow -2x-2=0\\&\Leftrightarrow x=-1\end{aligned}$$

であるから、 $\alpha=-1$ である。また、 $\frac{d^2f}{dx^2}=0$ となる x の値を β とすると、 $u>0$ より

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2}&=0\\&\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow e^{-2x-2}=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow -2x-2=-\log 2\\&\Leftrightarrow x=\frac{\log 2-2}{2}\end{aligned}$$

であるから、 $\beta=\frac{\log 2-2}{2}$ である。 $u=e^{-2x-2}$ は x に関して単調減少関数であるから、 $\alpha<\beta$ で

ある。よって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	－	0	＋	＋	＋
$f''(x)$	＋	＋	＋	0	－
$f(x)$	↘		↗		↗

したがって、 $x<\alpha$ において $f(x)$ は常に減少し、曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。また、 $\alpha< x < \beta$ において $f(x)$ は常に増加し、曲線 $y=f(x)$ は下に凸であり、 $\beta < x$ において $f(x)$

は常に増加し、曲線 $y=f(x)$ は上に凸である。定積分 $I=\int_a^{\beta}f(x)dx$ について、 $u=e^{-2x-2}$ と置

換すると、

$$\begin{array}{c|c}\frac{du}{dx}=-2u\Leftrightarrow dx=-\frac{1}{2u}du&\\ \hline x&a\rightarrow\beta\\ \hline u&1\rightarrow\frac{1}{2}\end{array}$$

より、 I の値は

$$\begin{aligned}I&=\int_1^{\frac{1}{2}}(u-1)^2\cdot\left(-\frac{1}{2u}\right)du\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(u-2+\frac{1}{u}\right)du\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2-2u+\log u\right]_{\frac{1}{2}}^1\\&=\frac{1}{2}\log 2-\frac{5}{16}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	2	2	1	2	6	1	3	2	6
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
0	3	2	5	2	2	8	5		

〔解説〕

$$\frac{2x+6}{x+2} = \frac{2(x+2)+2}{x+2} = \frac{2}{x+2} + 2$$

であるから、 C は曲線 $y = \frac{2}{x}$ を x 軸方向に -2 、 y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線である。ま

た、

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2} + \frac{5}{f(x)} = \frac{1}{2} + \frac{5(x+2)}{2x+6} = \frac{6x+13}{2x+6}$$

である。さらに、

$$h(x) = \frac{3(2x+6)-5}{2x+6} = 3 - \frac{5}{2x+6}$$

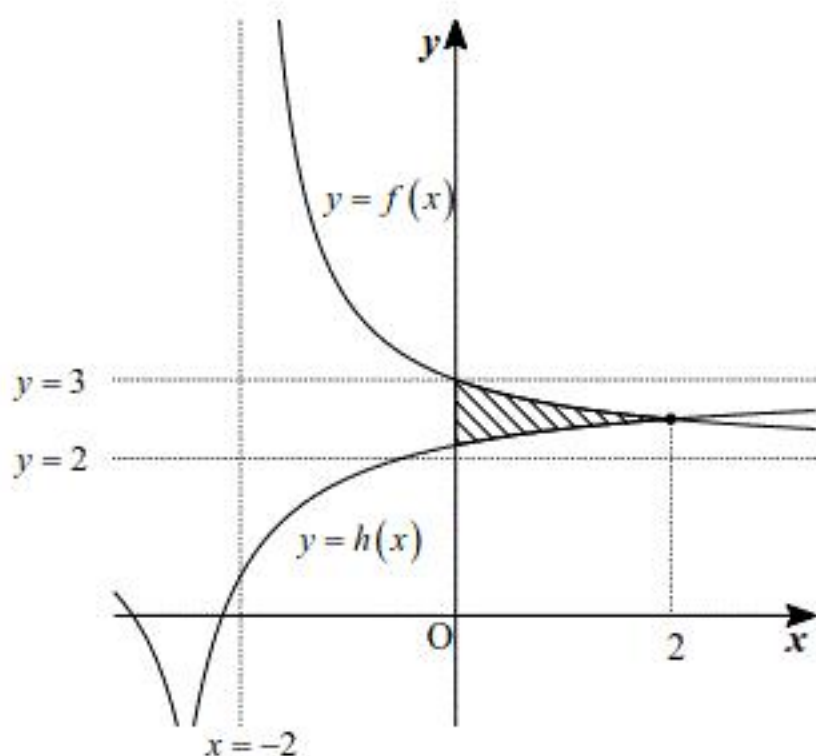
より、 D は曲線 $-\frac{5}{2x}$ を x 軸方向に -3 、 y 軸方向に 3 平行移動した曲線であるから、直線

$x = -3$ および $y = 3$ は D の漸近線である。 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ を連立すると

$$\begin{aligned} \frac{2x+6}{x+2} &= \frac{6x+13}{2x+6} \\ \Leftrightarrow (2x+6)^2 &= (x+2)(6x+13) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(2x+5) &= 0 \\ \therefore x &= 2, -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。点 P は第 1 象限にあるから、 P の x 座標は $x = 2$ であり、 $P\left(2, \frac{5}{2}\right)$ となる。曲線 C, D お

よび y 軸に囲まれた部分の面積を S とおくと、 S は下図の斜線部分の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{f(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2x+6}{x+2} - \frac{6x+13}{2x+6} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2}{x+2} + \frac{5}{2x+6} - 1 \right) dx \\ &= \left[2 \log(x+2) + \frac{5}{2} \log(2x+6) - x \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{2} \log \frac{5}{3} + 2 \log 2 - 2 \end{aligned}$$

である。