

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ					
	1	1	0					
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
	2	2	－	1	2	1	0	
(3)	サ	シ	(4)	ス	セ			
	1	3		－	2			
(5)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	1	5	3	－	1	2	3	2
	ヌ	ネ	ノ	ハ				
	1	2	3	2				
(6)	ヒ	フ	ヘ	ホ				
	7	0	2	4				
(7)	マ	ミ						
	1	6						

【解説】

(1)

解 $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}i$ を、方程式 $x^2 + ax + b = 0$ に代入することで、

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}i\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}i\right) + b = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{39}}{2}i - \frac{39}{4} - \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{39}}{2}ai + b = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}(-a + 2b - 19) + \frac{\sqrt{39}}{2}(-a + 1)i = 0 \end{aligned}$$

が得られる。 a, b は実数であるから、この式が成り立つとき、

$$\begin{cases} -a + 2b - 19 = 0 \\ -a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = 10$$

となる。

(2)

円 C が点 $(4, -2)$ を通るから、 x, y にそれぞれの座標の値を代入することで、

$$\begin{aligned} 4^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 4 + a \cdot (-2) &= 0 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

と求められる。したがって、円 C の方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

となるから、円 C の中心の座標は $(2, -1)$ である。また、点 $(4, -2)$ における接線の方程式は、円の接線の公式より、

$$\begin{aligned} (4 - 2)(x - 2) + (-2 + 1)(y + 1) &= 5 \\ \Leftrightarrow 2x - y - 5 &= 5 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 10 \end{aligned}$$

となる。

(3)

真数条件より、

$$\begin{aligned} 3 - x > 0 \quad \text{かつ} \quad 4x > 0 \\ \therefore 0 < x < 3 \end{aligned}$$

となる。ここで、与式を解くと、

$$\begin{aligned} \log_2(3 - x) &< \log_4 4x \\ \Leftrightarrow \log_2(3 - x) &< \frac{\log_2 4x}{\log_2 4} \\ \Leftrightarrow \log_2(3 - x)^2 &< \log_2 4x \\ \Leftrightarrow (3 - x)^2 &< 4x \quad (\because \text{底 } 2 > 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 9) &< 0 \\ \therefore 1 < x < 9 \end{aligned}$$

となる。これを真数条件と合わせると、求める x の値の範囲は、

$$1 < x < 3$$

となる。

(4)

部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x dx &= \int_0^\pi x (\sin x)' dx \\ &= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \sin x dx \\ &= 0 - [-\cos x]_0^\pi \\ &= -2 \end{aligned}$$

と求められる。

(5)

z を極形式で表すと、

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$$

となるから、 z の絶対値は $|z| = 1$ であり、 z の偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\theta = \frac{5}{3}\pi$ である。また、

た、ド・モルガンの定理より、

$$z^2 = 1^2 \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot 5}{3}\pi + i \sin \frac{2 \cdot 5}{3}\pi \right) = \cos \frac{10}{3}\pi + i \sin \frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。ここで、同様に、

$$\begin{aligned} z^3 &= \cos \frac{3 \cdot 5}{3}\pi + i \sin \frac{3 \cdot 5}{3}\pi = -1 \\ z^4 &= \cos \frac{4 \cdot 5}{3}\pi + i \sin \frac{4 \cdot 5}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z^5 &= \cos \frac{5 \cdot 5}{3}\pi + i \sin \frac{5 \cdot 5}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z^6 &= \cos \frac{6 \cdot 5}{3}\pi + i \sin \frac{6 \cdot 5}{3}\pi = 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{97} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^k &= \sum_{k=1}^{97} z^k \\ &= z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{96} + z^{97} \\ &= (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) \left(1 + z^6 + z^{12} + \cdots + z^{90} \right) + z^{97} \\ &= 0 + z^{16 \cdot 6 + 1} \\ &= 1^{16} \cdot z \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

となる。

(6)

$x_n = 0$ のとき $r_n = 0$ であるから、自然数 n は 10 の倍数である。 $y_n = 0$ のとき $s_n = 0$ であるから、自然数 n は 14 の倍数である。したがって、 $x_n = y_n = 0$ を満たす最小の n は、10 と 14 の最小公倍数 70 である。また、自然数 n を $14k + l$ (k は負でない整数、 $l = 1, 2, 3, \dots, 14$) とおくと、14 で割った余りは l 、10 で割った余りは $l, l + 2, l + 4, l + 6, l + 8$ のいずれかを、10 で割った余りと一致する。よって、すべての偶数 l に対して、 n を 10 で割った余りに 0, 2, 4, 6, 8 のすべてが存在し、すべての奇数 l に対して、 n を 10 で割った余りに 1, 3, 5, 7, 9 のすべてが存在することがわかる。すなわち、すべての偶数 $y_n (= 0, 2, 4, 6)$ に対して偶数 $x_n (= 0, 2, 4)$ が存在し、すべての奇数 $y_n (= 1, 3, 5, 7)$ に対して奇数 $y_n (= 1, 3, 5)$ が存在する。以上より、 x_n と y_n の偶奇は必ず一致することに注意すると、求める個数は、

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 24 \text{ (個)}$$

となる。

(7)

まず、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}}$ について考える。分母を有理化すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{2} (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \frac{1}{2} (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{2} (\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}) + \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2n+1} \end{aligned}$$

となるから、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2n+1} \right) = +\infty$$

となる。また、 $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(2k+1)} - \sqrt{(2k-1)(k+1)}}{\sqrt{k(k+1)}}$ について考える。式を変形すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(2k+1)} - \sqrt{(2k-1)(k+1)}}{\sqrt{k(k+1)}} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{\frac{2k+1}{k+1}} - \sqrt{\frac{2k-1}{k}} \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{\frac{5}{3}} \right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(\sqrt{\frac{2n-1}{n}} - \sqrt{\frac{2n-3}{n-1}} \right) + \left(\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} - \sqrt{\frac{2n-1}{n}} \right) \\ &= -1 + \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n(2n+1)} - \sqrt{(2n-1)(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(2k+1)} - \sqrt{(2k-1)(k+1)}}{\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}} \right) \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	
	1	0	0	2	
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ
	3	0	1	4	4
	コ	サ	シ	ス	セ
	1	0	1	1	0

〔解説〕

(1)

4つの問題を上から順に、 (a) , (b) , (c) , (d) とする。

(a) 命題「 $a^2 + b^2 > 0$ ならば $a > 0$ 」は偽であり(反例： $a = -1$)、命題「 $a > 0$ ならば $a^2 + b^2 > 0$ 」は、 a, b が実数であることより真であるから、 $a^2 + b^2 > 0$ は $a > 0$ であるための必要条件であるが十分条件でない。

(b) 命題「 a, b がともに無理数ならば $a + b$ は無理数である」は偽であり(反例： $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$)、命題「 $a + b$ は無理数ならば a, b がともに無理数である」も偽であるから(反例： $a = \sqrt{2}, b = 1$)、 a, b がともに無理数であることは、 $a + b$ は無理数であるための必要条件でも十分条件でもない。

(c) 命題「自然数 m が 2 で割り切れるならば m は素数である」は偽であり(反例： $m = 4$)、命題「自然数 m が素数ならば m は 2 で割り切れる」も偽であるから(反例： $m = 3$)、自然数 m が 2 で割り切れることは、 m が素数であるための必要条件でも十分条件でもない。

(d) 命題「 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において $AB = DE$ かつ $\angle ABC = \angle DEF$ かつ $\angle ACB = \angle DFE$ ならば $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似である」は、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であり相似比 1:1 と相似条件を満たすから真である。また、命題「 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が相似であるならば、 $AB = DE$ かつ $\angle ABC = \angle DEF$ かつ $\angle ACB = \angle DFE$ である」は偽であるから(反例： $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の相似比が 1:2 ならば $AB \neq DE$)、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、 $AB = DE$ かつ $\angle ABC = \angle DEF$ かつ $\angle ACB = \angle DFE$ であることは、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が相似であるための十分条件であるが必要条件でない。

(2)

条件「 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ 」を言い換えると、「 $x=1$ または $x=2$ または $x=3$ 」となる。また、条件「 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ 」の否定は「 $(x-1)(x-2)(x-3) \neq 0$ 」となり、条件「 $x=1$ または $x=2$ 」の否定は「 $x \neq 1$ かつ $x \neq 2$ 」となる。以上より、

命題 P の逆は、「 $x=1$ または $x=2 \Rightarrow x=1$ または $x=2$ または $x=3$ 」,

命題 P の裏は、「 $(x-1)(x-2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ かつ $x \neq 2$ 」,

命題 P の対偶は、「 $x \neq 1$ かつ $x \neq 2 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \neq 0$ 」となる。これらの命題の真偽を考えると、

命題 P 「 $(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=1$ または $x=2$ 」は偽(反例： $x=3$)、

命題 P の逆「 $x=1$ または $x=2 \Rightarrow x=1$ または $x=2$ または $x=3$ 」は真、

命題 P の裏は、命題 P の逆と対偶の関係にあり、真偽が一致するから真、

命題 P の対偶は、命題 P と真偽が一致するから偽である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ		
	－	4	7	－	2	4	－	2	9		
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ					
	2	6	3	3	2	3					
(2)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ				
	－	2	4	1	8	9	0				
(3)	ヌ	ネ	ノ	ハ							
	－	3	－	1							
	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム				
	5	2	－	3	4	0	1				

〔解説〕

(1)

問題文より，

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
 &= (-11, -6, -11) - (-7, -4, -9) \\
 &= (-4, -2, -2) \\
 \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\
 &= (8, 6, 5) - (6, 3, 3) \\
 &= (2, 3, 2)
 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} \\
 &= (-7, -4, -9) + s(-4, -2, -2) \\
 &= (-4s-7, -2s-4, -2s-9) \\
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD} \\
 &= (6, 3, 3) + t(2, 3, 2) \\
 &= (2t+6, 3t+3, 2t+3)
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)の結果より，

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\
 &= (2t+6, 3t+3, 2t+3) - (-4s-7, -2s-4, -2s-9) \\
 &= (4s+2t+13, 2s+3t+7, 2s+2t+12)
 \end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (-4) \cdot (4s+2t+13) + (-2) \cdot (2s+3t+7) + (-2) \cdot (2s+2t+12) \\
 &= -24s-18t-90
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)と同様に，

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 2 \cdot (4s+2t+13) + 3 \cdot (2s+3t+7) + 2 \cdot (2s+2t+12) \\
 &= 18s+17t+71
 \end{aligned}$$

である。直線 AB が直線 PQ と直交し，かつ，直線 CD が直線 PQ と直交しているとき，

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \end{cases}$$

が成立する。したがって，

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -24s-18t-90=0 \\ 18s+17t+71=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4s+3t+15=0 \\ 18s+17t+71=0 \end{cases} \\
 &\therefore s=-3, t=-1
 \end{aligned}$$

となる。(1)の結果に s, t を代入すると，P, Q の座標はそれぞれ，

$$P(5, 2, -3), Q(4, 0, 1)$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	－	1	4	9	4	1
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	－	3	－	1	6
(3)	ス	セ	ソ			
	3	－	2			
(4)	タ	チ				
	8	3				

【解説】

(1)

$|x+1|$ について、

$$|x+1|=\begin{cases} -x-1 & (x\leq -1 \text{ のとき}) \\ x+1 & (x> -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、 $-2\leq x\leq -1$ のとき、

$$f(x)=x^2-4(-x-1)+5=x^2+4x+9$$

となり、 $-1< x\leq 4$ のとき、

$$f(x)=x^2-4(x+1)+5=x^2-4x+1$$

となる。

(2)

$f(x)$ は、 $-2\leq x\leq -1$ のとき、

$$f(x)=x^2+4x+9=(x+2)^2+5$$

と変形でき、 $-1< x\leq 4$ のとき、

$$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$$

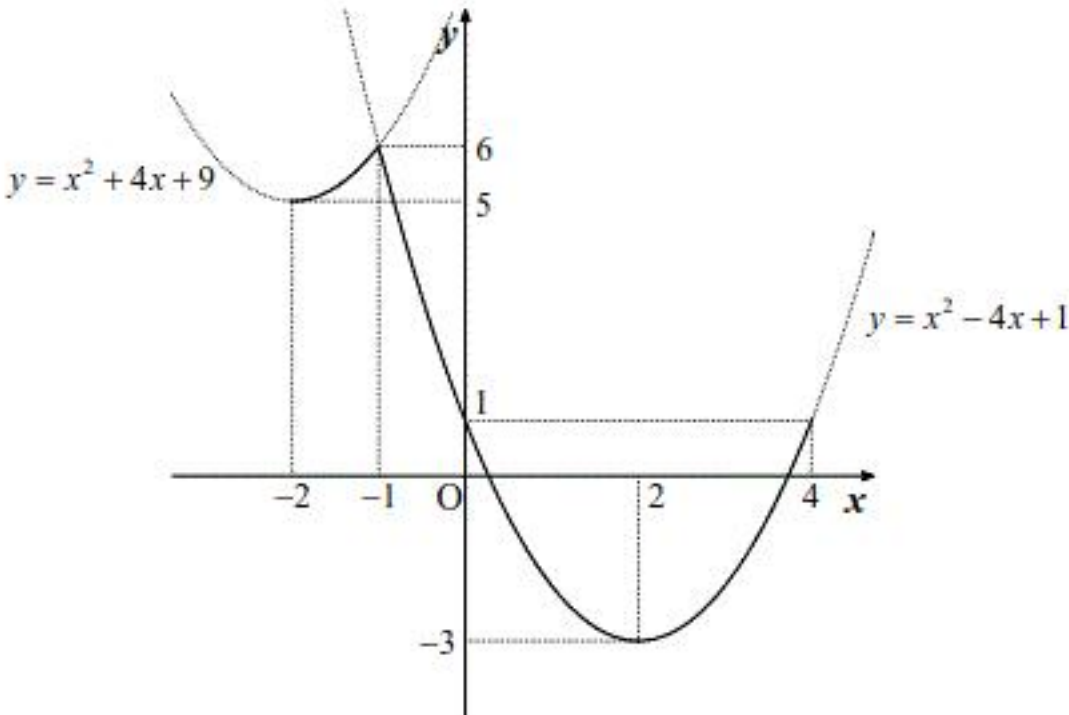
と変形できる。また、

$$f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)+9=5$$

$$f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+9=6$$

$$f(4)=4^2-4\cdot4+1=1$$

であるから、曲線 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より、 $f(x)$ は、 $x=2$ のとき最小値 -3 をとり、 $x=-1$ のとき最大値 6 をとる。

(3)

$y=x^2+4x+9$ と $y=-2x+1$ から y を消去して、 $-2\leq x\leq -1$ における共有点の x 座標を求めると、

$$x^2+4x+9=-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+4)=0$$

$$\therefore x=-2 \quad (\because -2\leq x\leq -1)$$

となる。同様に、 $y=x^2-4x+1$ と $y=-2x+1$ から y を消去して、 $-1< x\leq 4$ における共有点の x 座標を求めると、

$$x^2-4x+1=-2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=0$$

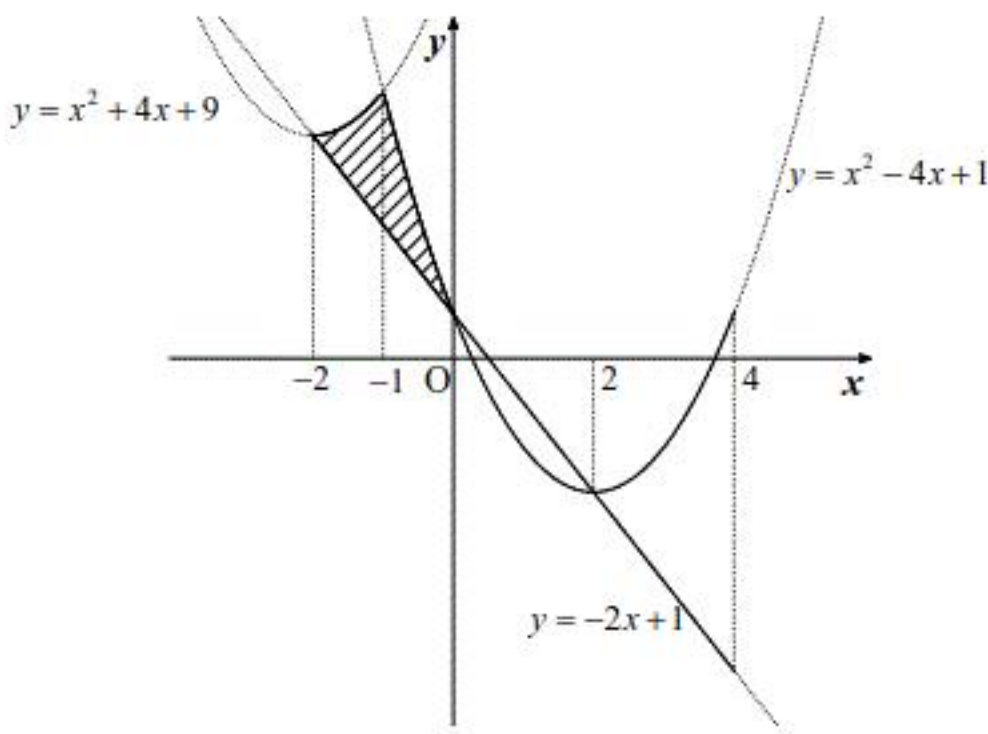
$$\Leftrightarrow x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0, 2 \quad (\because -1< x\leq 4)$$

となる。曲線 $y=f(x)$ 、直線 $y=g(x)$ はともに、 x 座標が1つに定まると y 座標も1つに定まるから、求める共有点の個数は3個である。また、これらの共有点のうち、 x 座標の最小の値は -2 となる。

(4)

(2)、(3)の結果より、曲線 $y=f(x)$ 、直線 $y=g(x)$ のグラフ、および求める面積を斜線部で以下に示す。



上図より、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \{(x^2+4x+9)-(-2x+1)\} dx + \int_{-1}^0 \{(x^2-4x+1)-(-2x+1)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2+6x+8) dx + \int_{-1}^0 (x^2-2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{3}+3-8 \right) - \left(-\frac{8}{3}+12-16 \right) \right\} + \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3}-1 \right) \right\} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

【V】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	3	0	2	4
(2)	オ	カ	キ	
	1	2	0	
(3)	ク	ケ	コ	
	4	8	0	
(4)	サ	(5)	シ	
	0		5	
(6)	ス	セ	ソ	タ
	9	2	3	5

【解説】

(1)

1から9までの9個の数字から異なる4個の数字を使ってできる4桁の数の個数は、異なる9個から4個を選んで順に並べるときの並べ方の総数に等しいから、

$${}_9C_4 \cdot 4! = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4! = 3024 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

ヒットとなる2個の数字の選び方は、

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ (通り)}$$

である。それぞれの場合に対し、ヒットとならない2個の数字はブローともならないから、5, 6, 7, 8, 9のいずれかとなる。よって、この2個の数字の選び方は、並べ方を考慮すると、

$${}_5C_2 \cdot 2! = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 2! = 20 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める解答の個数は、

$$6 \cdot 20 = 120 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

ヒットとなる1個の数字の選び方は、

$${}_4C_1 = 4 \text{ (通り)}$$

である。それぞれの場合に対し、ブローとなる数字の選び方は、

$${}_3C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

であり、その数字はヒット、ブローとなる数字の正解の位以外の位にあるから、位の選び方が2通りある。また、残りの2個の数字はヒットでもブローでもないから、解答に使われていない5個の数字のうちのいずれか2個である。その選び方は、(2)と同様にして、

$${}_5C_2 \cdot 2! = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 2! = 20 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める解答の個数は、

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 20 = 480 \text{ (通り)}$$

である。

(4)

ヒットとなる数字が3個あるとき、残りのヒットでない数の位は1つに定まるから、ブローとはなりえない。よって、求める解答の個数は0通りである。

(5)

「1234」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが2個、ブローが0個」であるから、正解の数は、1, 2, 3, 4のうちの2個、5, 6, 7, 8, 9のうちの2個を含む数である。よって、

「5678」と解答したときに与えられる可能性のあるヒントについて、正解の数に9が含まれるかどうかで場合分けして考える。

[1] 正解の数に9が含まれる場合

正解の数には5, 6, 7, 8のうちの1個が含まれる。よって、「5678」と解答したときに与えられる可能性のあるヒントは、「ヒットが1個、ブローが0個」、「ヒットが0個、ブローが1個」の2通りである。

[2] 正解の数に9が含まれない場合

正解の数には5, 6, 7, 8のうちの2個が含まれる。よって、「5678」と解答したときに与えられる可能性のあるヒントは、「ヒットが2個、ブローが0個」、「ヒットが1個、ブローが1個」、「ヒットが0個、ブローが2個」の3通りである。

以上、[1], [2]より、求めるヒントの個数は

$$2 + 3 = 5 \text{ (通り)}$$

である。

(6)

まず、背理法を用いて、正解の数の十の位の数が3であることを示す。正解の数の十の位の数
が3でないと仮定する。「1234」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが2個、ブ
ローが0個」であるから、千の位の1、百の位の2、一の位の4のうち、2個がヒットとなる。ま
た、「9832」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが2個、ブローが1個」であるか
ら、千の位の9、百の位の8、一の位の2のうち、2個がヒットとなる。しかし、これら両方を
満たす4桁の数は存在しない。したがって、正解の数の十の位の数
は3である。また、「9876」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが1個、ブローが0
個」であるから、正解の数には以下の3つの場合が考えられる。

[1] 一の位の数
が6である場合

このとき、正解の数に9, 8はいずれも含まれない。しかし、「9832」と解答したときに与
えられるヒントが「ヒットが2個、ブローが1個」であることに矛盾する。したがって、こ
の場合に条件を満たす4桁の数は存在しない。

[2] 百の位の数
が8である場合

このとき、正解の数に9は含まれない。よって、「9832」と解答したときに与えられる
ヒントが「ヒットが2個、ブローが1個」であることから、千の位の数
は2となる。しかし、これは「1234」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが2
個、ブローが0個」であることに矛盾する。したがって、この場合に条件を満たす4桁の
数は存在しない。

[3] 千の位の数
が9である場合

このとき、正解の数に8は含まれない。よって、「9832」と解答したときに与えられる
ヒントが「ヒットが2個、ブローが1個」であることから、百の位の数
は2となる。このとき、「1234」と解答したときに与えられるヒントが「ヒットが2
個、ブローが0個」であることから、一の位
の数は1, 2, 3, 4のうちのいずれでもない。また、「9876」と解答したときに与
えられるヒントが「ヒットが1個、ブローが0個」であることから、一の位
は9, 8, 7, 6のうちのいずれでもない。したがって、一の位
は5である。以上より、この場合に条件を満たす4桁の数は9235である。

以上、[1], [2], [3]より、求める正解は9235である。