

【I】

(1)

$n=4, x=2$ のとき y は

$$\begin{aligned}(2-4)^2 < y < -2^2 + 4^2 \\ \Leftrightarrow 4 < y < 12\end{aligned}$$

を満たす。このような y は $12-4-1=7$ 個ある。よって題意を満たす (x, y) は 7 個ある。

(答) 7 個

(2)

$x=n-1$ のとき y は

$$\begin{aligned}(n-1-n)^2 < y < -(n-1)^2 + n^2 \\ \Leftrightarrow 1 < y < 2n-1\end{aligned}$$

を満たす。ここで、 n は 2 以上の整数であることから、 $2n-1 \geq 3$ となり、 $2n-1 > 1$ となる。このような y は $2n-1-1-1=2n-3$ 個ある。よって題意を満たす (x, y) は $2n-3$ 個ある。

(答) $2n-3$ 個

(3)

$y > (x-n)^2$ かつ $y < -x^2 + n^2$ を満たす正の整数 x, y が存在するためには、 $(x-n)^2 < -x^2 + n^2$ が

成立する必要がある。ここで、 $0 \leq (x-n)^2$ より $0 < -x^2 + n^2$ であるから、

$$\begin{aligned}0 < -x^2 + n^2 \\ \Leftrightarrow x^2 < n^2 \\ \therefore 0 < x < n \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。ここで $0 < k < n$ を満たす整数 k をおく。 $x=k$ のとき y は

$$\begin{aligned}(k-n)^2 < y < -k^2 + n^2 \\ \Leftrightarrow k^2 - 2nk + n^2 < y < -k^2 + n^2\end{aligned}$$

を満たす。ここで、

$$\begin{aligned}(-k^2 + n^2) - (k^2 - 2nk + n^2) &= -2k^2 + 2nk \\ &= 2k(n-k) \\ &> 0 \quad (\because 0 < k < n)\end{aligned}$$

であることより、 $-k^2 + n^2 > k^2 - 2nk + n^2$ となる。このような y は

$$-k^2 + n^2 - (k^2 - 2nk + n^2) - 1 = -2k^2 + 2nk - 1$$

個ある。よって、題意を満たす (x, y) の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (-2k^2 + 2nk - 1) &= \frac{-2}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{2n}{2}n(n-1) - (n-1) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)(-2n^2 + n + 3n^2 - 3) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)(n^2 + n - 3)\end{aligned}$$

個である。

(答) $\frac{1}{3}(n-1)(n^2 + n - 3)$ 個

(4)

m を正の整数とし、 $n=2m+1$ とおく。 xy が偶数になる (x, y) の個数は(3)の結果から、 (x, y) がともに奇数である組の数を引けばよい。 $0 < k < m+1$ を満たす整数 k をおく。 $x=2k-1$ のとき y は

$$\begin{aligned}(2k-1-n)^2 < y < -(2k-1)^2 + n^2 \\ \Leftrightarrow (2k-1)^2 - 2n(2k-1) + n^2 < y < -(2k-1)^2 + n^2\end{aligned}$$

を満たす。このような y は

$$-(2k-1)^2 + n^2 - (2k-1)^2 + 2n(2k-1) - n^2 - 1 = -2(2k-1)^2 + 2n(2k-1) - 1$$

個ある。今 n, x がともに奇数であることから $(x-n)^2$ と $-x^2 + n^2$ はともに偶数である。よって、

上の $-2(2k-1)^2 + 2n(2k-1) - 1$ 個の y は、奇数で始まり奇数で終わる連続した自然数の集まりである。このうち奇数の y は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{-2(2k-1)^2 + 2n(2k-1) - 1 + 1\} &= -(2k-1)^2 + n(2k-1) \\ &= -4k^2 + 4k - 1 + 2kn - n \\ &= -4k^2 + 2(2+n)k - n - 1\end{aligned}$$

個ある。よって (x, y) がともに奇数である組の数は $\sum_{k=1}^m \{-4k^2 + 2(2+n)k - n - 1\}$ となる。

$2m=n-1$ であることを用いると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \{-4k^2 + 2(2+n)k - n - 1\} &= -\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1) + (2+n)m(m+1) - (n+1)m \\ &= -\frac{2m}{6}(2m+2)(2m+1) + \frac{1}{4}(n+2)2m(2m+2) - \frac{2m}{2}(n+1) \\ &= -\frac{(n-1)}{6}(n+1)n + \frac{1}{4}(n+2)(n-1)(n+1) - \frac{(n-1)}{2}(n+1) \\ &= \frac{1}{12}(n-1)(n+1)(-2n+3n+6-6) \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n+1)\end{aligned}$$

となる。よって xy が奇数になる (x, y) の個数は $\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)$ 個となる。以上より xy が偶数になる (x, y) の個数は

$$\frac{1}{3}(n-1)(n^2 + n - 3) - \frac{1}{12}n(n-1)(n+1) = \frac{1}{4}(n-1)(n^2 + n - 4)$$

個である。

(答) $\frac{1}{4}(n-1)(n^2 + n - 4)$ 個

〔Ⅱ〕

(1)

(i)

$a_1 + a_2 + a_3$ が最小となるのは a_1, a_2, a_3 が $1, 2, 1$ となるときである。このとき $m = 1 + 2 + 1 = 4$ である。

(答) $m = 4$

(ii)

S を 1 回倒したときに α に接している面に書かれている数字は 3 通りあり、これらは同様に確からしい。 $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ となるのは (i) の 1 通りであるので求める確率は

$$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

である。

(答) $\frac{1}{27}$

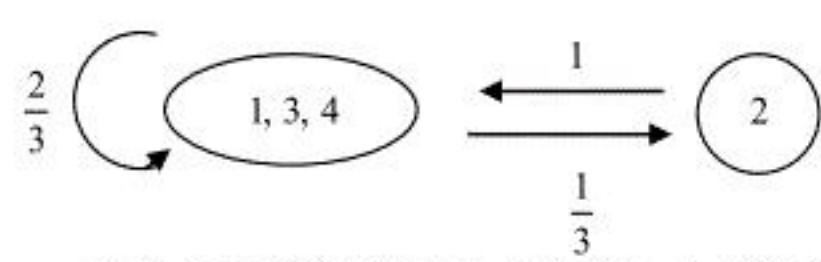
(iii)

$a_1 = a_2, a_2 = a_3$ となることはないため、求める確率は a_3 が a_1 と異なる確率である。 a_3 のとりうる値は a_1 を含む 3 つの数字であり、これらは同様に確からしい。ここで a_3 は a_1 でない数字であればよいので、求める確率は $\frac{2}{3}$ である。

(答) $\frac{2}{3}$

(2)

(i)



$a_n \in \{1, 3, 4\}$ である確率を Q_n と置くと、上の遷移図より

$$\begin{cases} Q_{n+1} = \frac{2}{3}Q_n + 1 \cdot (1 - Q_n) \\ Q_0 = 1 \end{cases}$$

が成立することが分かる。

[1] $n \geq 2$ のとき

a_k ($1 \leq k \leq n-1$) のみが 2 である確率は $k-1$ 回、 $\{1, 3, 4\}$ を繰り返し、 k 回目で $\{1, 3, 4\}$ から $\{2\}$ に遷移し、 $k+1$ 回目で $\{2\}$ から $\{1, 3, 4\}$ に遷移し、残りの $n-k-1$ 回 $\{1, 3, 4\}$ を繰り返す確率であるから、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

となる。また、 a_n のみが 2 である確率は $n-1$ 回、 $\{1, 3, 4\}$ を繰り返し、 n 回目で $\{1, 3, 4\}$ から $\{2\}$ に遷移する確率であるから、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

となる。上記の事象は全て排反であるため、求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} &= \frac{n-1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3n-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $n=1$ のとき

$a_1 = 2$ となる確率は $\frac{1}{3}$ であり、これは [1] の結果に含まれる。

以上 [1], [2] より、求める確率は $\frac{3n-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ となる。

(答) $\frac{3n-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii)

a_{n-1} が 4 以外するとき $\frac{1}{3}$ の確率で a_n が 4 となる。 a_{n-1} が 4 のとき 0 の確率で a_n が 4 となる。よって P_n は

$$P_n = \frac{1}{3}(1 - P_{n-1})$$

とできる。

(答) $P_n = \frac{1}{3}(1 - P_{n-1})$

(iii)

$P_n = \frac{1}{3}(1 - P_{n-1})$ を変形すると

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{3}(1 - P_{n-1}) \\ \Leftrightarrow P_n - \frac{1}{4} &= -\frac{1}{3} \left(P_{n-1} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。 $\left\{ P_n - \frac{1}{4} \right\}$ は等比数列なので

$$P_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \cdot \left(P_1 - \frac{1}{4} \right)$$

となる。 $P_1 = 0$ より $P_n = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{4}$ となる。

(答) $P_n = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{4}$

【Ⅲ】

(1)

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-(3+b)x^2+6bx-18$ …②の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x^2-2(3+b)x+6b \\ &= 2\{x^2-(3+b)x+3b\} \\ &= 2(x-3)(x-b)\end{aligned}$$

となる。 $f'(x)=0$ のとき $x=3, b$ であり、 $b \neq 3$ のときそれぞれの前後で $f'(x)$ の符号が変化するため $f(x)$ は極値をとる。したがって、 $3 < b$ より、点 A の x 座標は 3、点 B の x 座標は b である。

(答) 点 A の x 座標は 3、点 B の x 座標は b

(2)

(1)より②に $x=3, b$ を代入すると

$$\begin{aligned}f(3) &= 18-9(3+b)+18b-18=9b-27 \\ f(b) &= \frac{2}{3}b^3-(3+b)b^2+6b^2-18=-\frac{1}{3}b^3+3b^2-18\end{aligned}$$

より点 A の座標は $(3, 9b-27)$ であり、点 B の座標は $\left(b, -\frac{1}{3}b^3+3b^2-18\right)$ である。よって $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (3, 9b-27) \\ &= (3, 9(b-3)) \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} \\ &= \left(b-3, -\frac{1}{3}b^3+3b^2-18-9b+27\right) \\ &= \left(b-3, -\frac{1}{3}(b-3)^3\right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OA}=(3, 9(b-3)), \overrightarrow{AB}=\left(b-3, -\frac{1}{3}(b-3)^3\right)$

(3)

条件①より $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ である。(2)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(b-3)+9(b-3)\left\{-\frac{1}{3}(b-3)^3\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(b-3)\{1-(b-3)^3\} &= 0 \\ 3(b-3) \neq 0 \text{ より} \\ 1-(b-3)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-3)^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow b-3 &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 4\end{aligned}$$

となる。

(答) $b=4$

(4)

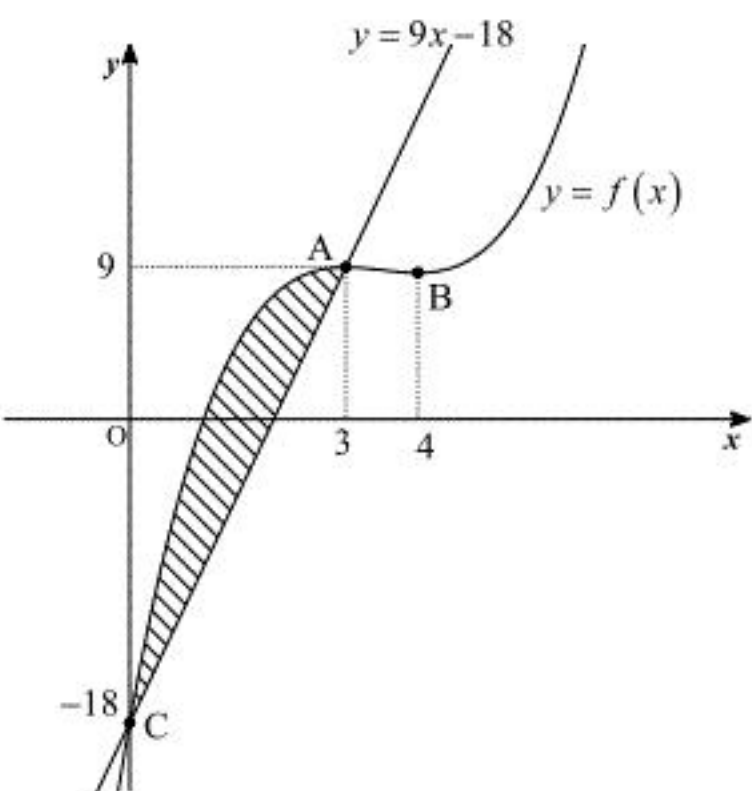
(3)より②は $f(x)=\frac{2}{3}x^3-7x^2+24x-18$ となる。点 A の座標は $(3, 9)$ であり、点 B の座標は $\left(4, \frac{26}{3}\right)$ である。よって $f(x)$ の増減表は

x	...	3	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{26}{3}$	$\nearrow$

となる。また、点 C の座標は $(0, -18)$ であることから、直線 AC の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{9-(-18)}{3-0}(x-0)-18 \\ \Leftrightarrow y &= 9x-18\end{aligned}$$

である。したがって $y=f(x)$ と直線 AC を図示すると以下のようになる。線分 AC と F で囲まれる図形は下図の斜線部である。



求める面積 S は上図の斜線部の面積であるので、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 \left\{ \left(\frac{2}{3}x^3-7x^2+24x-18 \right) - (9x-18) \right\} dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^3-7x^2+15x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{27}{2} - 63 + \frac{135}{2} \right) - 0 \\ &= 18\end{aligned}$$

となる。

(答) 図示：上図
面積： $S=18$

(5)

$\triangle AOB$ は

$$\begin{aligned}OA &= \sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10} \\ AB &= \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{10}\end{aligned}$$

の直角三角形であるので

$$\tan \angle AOB = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{9}$$

である。 $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より $\tan \angle AOB < \tan \frac{\pi}{6}$ である。以上より $\angle AOB < \frac{\pi}{6}$ とわかる。

(証明終)