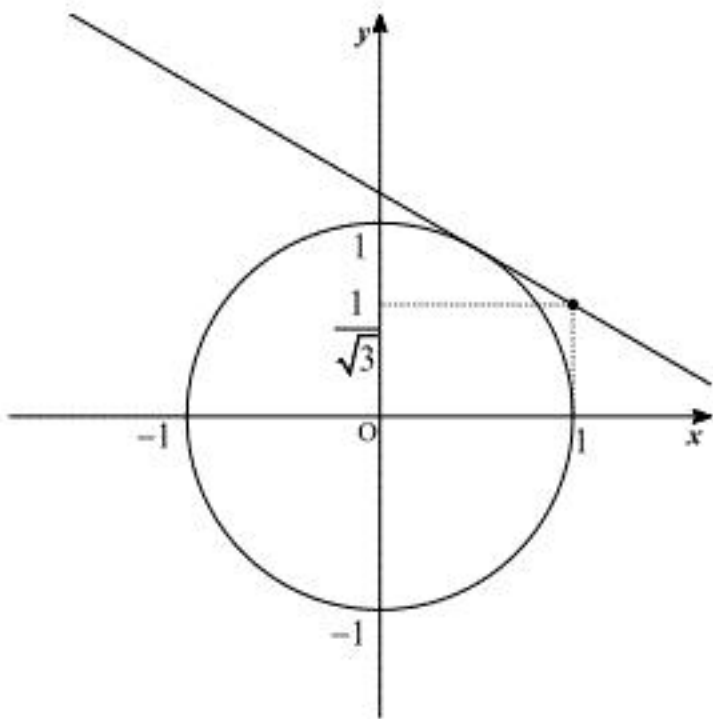


〔I〕

(1)



円の接点を (p, q) とおく。このとき、接線の方程式は

$$px + qy = 1$$

である。これは点 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を通るため、

$$p + \frac{1}{\sqrt{3}}q = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、 (p, q) は円周上の点であるから、

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①を②に代入して、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}q\right)^2 + q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}q^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}q &= 0 \\ \Leftrightarrow q\left(q - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0 \\ \therefore q &= 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

が得られる。 $q = 0$ のとき、接線は y 軸と平行になり、 y 軸と交わらないため条件を満たさない。

したがって、 $(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が得られ、接線の方程式は

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$$

となる。したがって、 x 切片と y 切片はそれぞれ、 $(2, 0), \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ となり、三平方の定理より、

$$PQ = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(答) $PQ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(2)

(1)と同様にして、円の接点を (s, t) とおく。ただし、条件より $s > 0, t > 0$ である。このとき、接

線 ℓ の x 切片と y 切片はそれぞれ、 $\left(\frac{1}{s}, 0\right), \left(0, \frac{1}{t}\right)$ となるので、三平方の定理より、

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。また、(1)と同様、

$$s^2 + t^2 = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。③に④を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1-s^2} &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow 1-s^2 + s^2 &= \frac{9}{2}s^2(1-s^2) \\ \Leftrightarrow 9s^4 - 9s^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3s^2 - 2)(3s^2 - 1) &= 0 \\ \therefore s &= \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because s > 0) \end{aligned}$$

となる。このとき、 t は順に $t = \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because t > 0$) であるから、接線の傾きは、

$$-\frac{s}{t} = -\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。

(答) $-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

〔Ⅱ〕

(1)

$$y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

であるから、 $x=2$ で最大値 $M=2$ 、 $x=\frac{1}{2}$ で最小値 $m=-\frac{1}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad M=2, m=-\frac{1}{4}$$

(2)

$$y = x^2 - bx = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

である。

[1] $\frac{b}{2} \geq 1$ すなわち $b \geq 2$ のとき

$x=0$ で最大値 0 をとるため不適である。

[2] $\frac{b}{2} < 1$ すなわち $b < 2$ のとき、

$x=2$ で最大値 $4-2b$ をとる。したがって、

$$4-2b=3$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

である。これは $b < 2$ を満たす。このとき $\frac{b}{2} = \frac{1}{4}$ は $0 \leq x \leq 2$ の範囲にあるから、 $x = \frac{b}{2} = \frac{1}{4}$

で最小値 $m = -\frac{b^2}{4} = -\frac{1}{16}$ をとる。

以上[1], [2]より $b = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{16}$ である。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{16}$$

(3)

$$y = ax^2 - x = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}$$

である。

[1] $x = \frac{1}{2a}$ で最小値をとるとき

すなわち、 $0 \leq \frac{1}{2a} \leq 2 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$ ($\because a > 0$) のときである。

$$-\frac{1}{4a} = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore a = \frac{5}{24}$$

となる。これは $a \geq \frac{1}{4}$ を満たさないため、不適である。

[2] $x=2$ で最小値をとるとき

すなわち、 $\frac{1}{2a} \geq 2 \Leftrightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$ ($\because a > 0$) のときである。

$$4a-2 = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}$$

となる。これは $0 < a \leq \frac{1}{4}$ を満たす。このとき、 $x=0$ で最大値 $M=0$ をとる。

以上[1], [2]より、 $a = \frac{1}{5}$, $M=0$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{5}, M=0$$

〔Ⅲ〕

(1)

球をすべて区別して考えると、すべての取り出し方は同様に確からしい。赤球を2つまたは青球を2つ取り出せばよいから、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

となる。

(答) $\frac{4}{15}$

(2)

[1] 1回目の操作で3つの赤球から1つと2つの青球から1つを取り出し、2回目の操作で2つの赤球から1つと3つの黄球から1つを取り出す

または

[2] 1回目の操作で3つの赤球から1つと1つの黄球から1つを取り出し、2回目の操作で2つの赤球から1つと4つの青球から1つを取り出す

のいずれかであればよい。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} + \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

となる。

(答) $\frac{4}{15}$

(3)

袋の中に赤球が入っていないのは、毎回の操作が「赤球1個と青球または黄球を1個取り出し、取り出さなかった青球または黄球を2つ袋に入れる」となるときである。ここで、青球と黄球を「赤でない球」としてまとめて考えると、1回目の操作で3つの赤球から1つと3つの赤でない球から1つを取り出し、2回目の操作で2つの赤球から1つと4つの赤でない球から1つを取り出し、3回目の操作で1つの赤球から1つと5つの赤でない球から1つを取り出すことになるから、求める確率は、

$$\frac{(3 \times 3) \times (2 \times 4) \times (1 \times 5)}{({}_6C_2)^3} = \frac{8}{75}$$

となる。

(答) $\frac{8}{75}$