

〔 1 〕

〔解答〕

(1)	ア	イ		
	1	2		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	1	1	7	2

〔解説〕

(1)

与えられた条件式を,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

と変形し, $x+y=4$ を代入すると,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = 2$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{x+y}{2}$$

$$\therefore xy = \frac{4}{2} = 2$$

となる。これより,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= 4^2 - 2 \cdot 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

を得る。

(2)

$x+y=k$ とおくと, xy は k を用いて

$$\frac{x+y}{xy} = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{k}{2}$$

と表される。このとき, 与えられた式を変形すると,

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 4$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 4 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

となり, $x+y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ を得る。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	1	3	1	8
(2)	オ	カ	キ	ク
	5	5	8	4

〔解説〕

(1)

全ての球の取り出し方は ${}_9C_2 = 36$ (通り)であり、これらは同様に確からしく起こる。このとき、取り出した球が1種類のみである確率は

$$\frac{{}_3C_2 + {}_2C_2 + {}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{3+1+6}{36} = \frac{5}{18}$$

である。求める確率はこの事象の余事象の確率であるから、

$$1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

を得る。

(2)

全ての球の取り出し方は ${}_9C_3 = 84$ (通り)であり、これらは同様に確からしく起こる。このとき、取り出した球が1種類のみである確率は

$$\frac{{}_3C_3 + {}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1+4}{84} = \frac{5}{84}$$

であり、取り出した球が3種類すべての球を含んでいる確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{84} = \frac{24}{84}$$

である。求める確率は、これら2つの事象の余事象の確率であるから、

$$1 - \frac{5}{84} - \frac{24}{84} = \frac{55}{84}$$

を得る。

【3】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	2	1	0	
(2)	エ	オ	カ	キ
	1	0	2	0

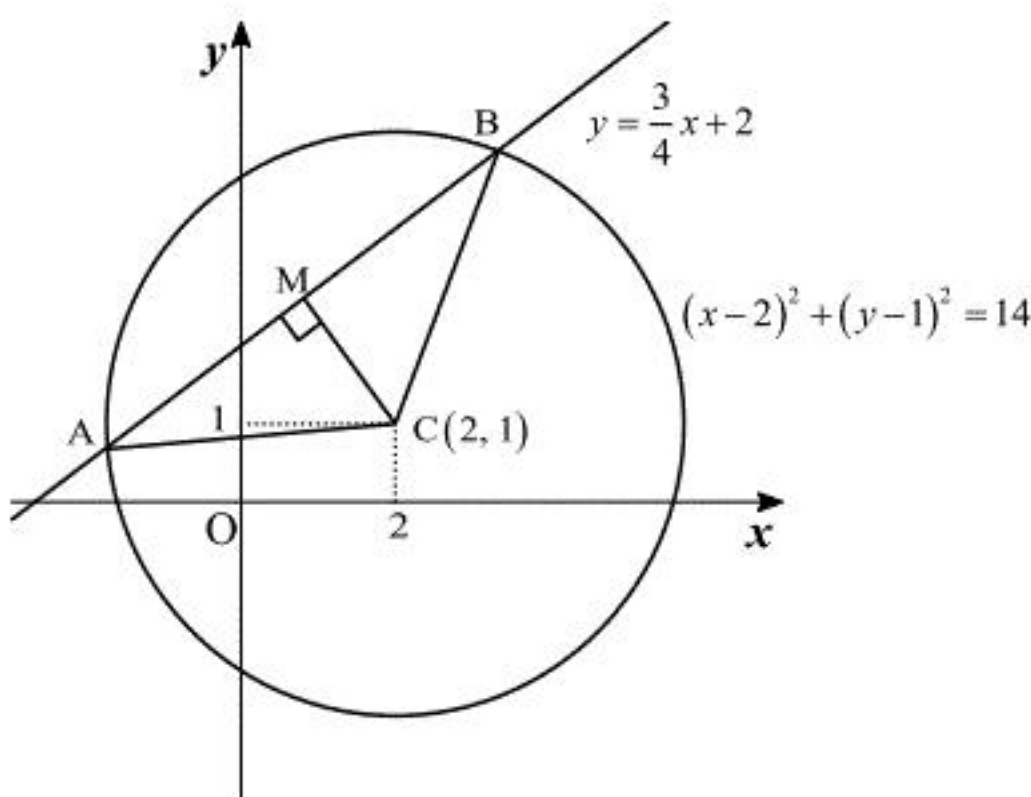
〔解説〕

(1)

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 14$$

より、与えられた円は点 $C(2, 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{14}$ の円である。線分 AB の中点を M として、 xy 平面上での円と直線の位置関係を以下に示す。



上図より、 $AB = 2AM$ であるから、 AM の長さを求めればよい。 $\triangle ACM$ は、 AC を斜辺とする直角三角形であることに着目すると、三平方の定理より、 $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2}$ とわかる。ここで、 AC の長さは円の半径より $\sqrt{14}$ である。また、 CM の長さは、点 C と直線 $\frac{3}{4}x - y + 2 = 0$ との距離に等しいから、

$$CM = \frac{\left| \frac{3}{4} \cdot 2 - 1 + 2 \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 + 1^2}} = 2$$

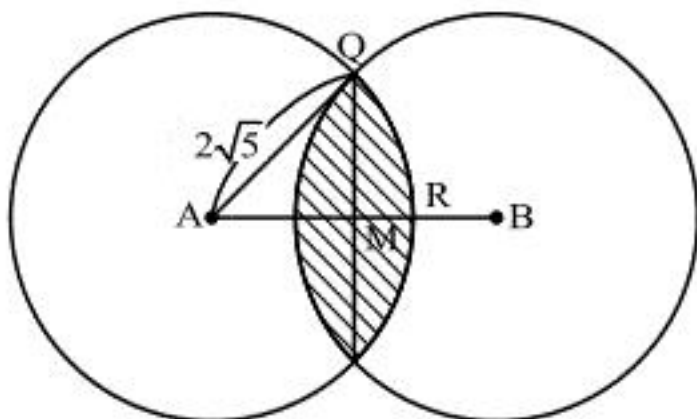
である。以上より、

$$AB = 2\sqrt{14 - 4} = 2\sqrt{10}$$

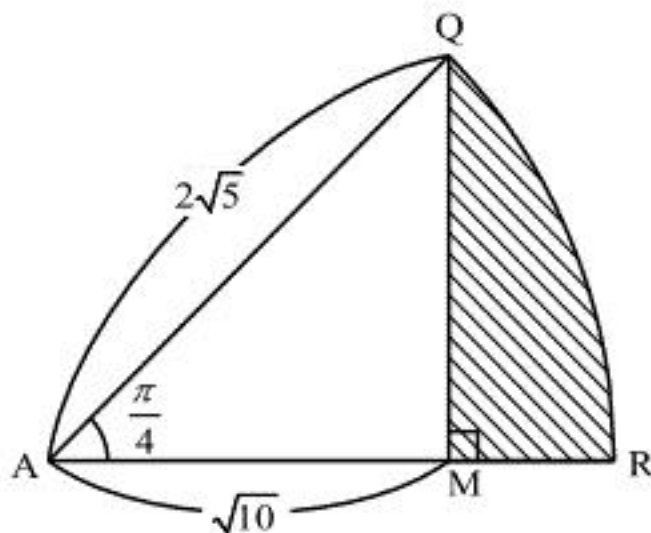
を得る。

(2)

点 P が $AP \leq 2\sqrt{5}$ を満たすとき、点 P は点 A を中心とする半径 $2\sqrt{5}$ の円の周および内部に存在する。同様にして、点 P が $BP \leq 2\sqrt{5}$ を満たすとき、点 P は点 B を中心とする半径 $2\sqrt{5}$ の円の周および内部に存在する。したがって、点 P が $AP \leq 2\sqrt{5}$ かつ $BP \leq 2\sqrt{5}$ を満たすとき、点 P が存在する領域は以下の図の斜線部分の領域である。ただし、境界を含む。



上図のように点 Q, R をとり、扇形 AQR に着目する。



上図より、 $\triangle AMQ$ について、三平方の定理から、

$$QM = \sqrt{AQ^2 - AM^2} = \sqrt{10}$$

である。これより AMQ は直角二等辺三角形と分かり、したがって $\angle QAM = \frac{\pi}{4}$ である。図形の対称性より、求める面積は、上図の扇形 AQR の斜線部分の領域の面積を 4 倍したものであるから、求める面積を S として、

$$S = 4 \left\{ \frac{1}{2} (2\sqrt{5})^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\sqrt{10})^2 \right\}$$

$$= 4 \left(\frac{5\pi}{2} - 5 \right)$$

$$= 10\pi - 20$$

を得る。

〔4〕

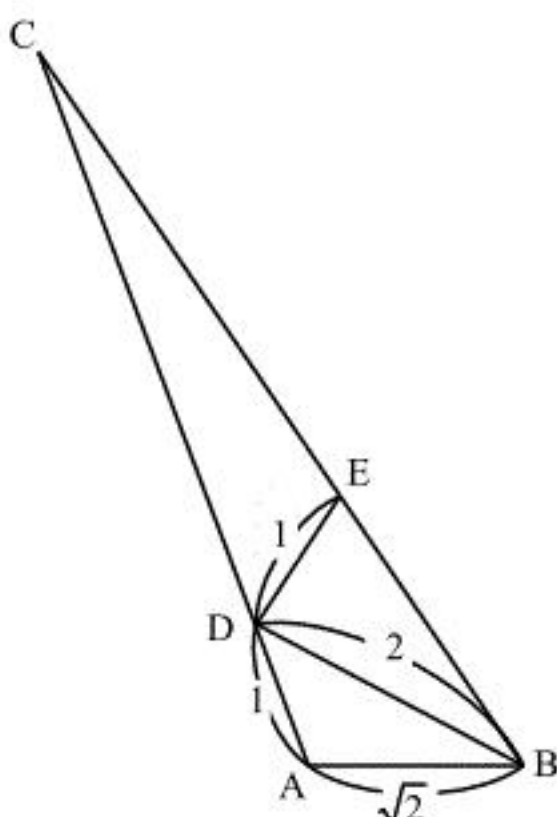
〔解答〕

(1)	ア	イ	
	2	4	
(2)	ウ	エ	オ
	3	2	2
(3)	カ	キ	ク
	5	5	2

〔解説〕

(1)

三角形 ABC および点 D, E を図に示すと、以下のようになる。



△ ABD について余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAD &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \\ &= \frac{2+1-4}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。

(2)

四角形 ABED は円に内接する四角形であるから、対角の和は 180° である。したがって、

$$\begin{aligned}\angle BAD + \angle BED &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \angle BED &= 180^\circ - \angle BAD\end{aligned}$$

である。 $BE = x$ とおくと、△ BDE について余弦定理より、

$$\begin{aligned}BD^2 &= BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot DE \cdot \cos \angle BED \\ \Leftrightarrow 4 &= x^2 + 1 - 2x \cos(180^\circ - \angle BAD) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - \sqrt{2}x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0\end{aligned}$$

が成立する。 $x = BE > 0$ より、 $BE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ である。

(3)

(2)より、 $\angle BAD + \angle BED = 180^\circ$ であり、線分 BC と線分 DE がなす角について、
 $\angle CED + \angle BED = 180^\circ$ であることに注意すると、 $\angle CED = \angle BAD$ とわかる。したがって、
 △ ABC と △ EDC は相似であり、その相似比は $AB : ED = \sqrt{2} : 1$ である。ここで、

$CD = y$, $CE = z$ とおくと、 $AC = y + 1$, $BC = z + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ と表すことができ、相似比から、

$AC = \sqrt{2}CE$, $BC = \sqrt{2}CD$ が成立するから、

$$\begin{cases} y + 1 = \sqrt{2}z \\ z + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}y \end{cases}$$

が得られる。この連立方程式を解くと、 $(y, z) = \left(4, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ である。以上より、求める周の長さは、

$$AB + AC + BC = \sqrt{2} + 5 + 4\sqrt{2} = 5 + 5\sqrt{2}$$

とわかる。

〔5〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ		
	3	9	4		
(2)	エ	オ	カ	キ	
	3	2	1	2	
(3)	ク	ケ			
	4	2			

〔解説〕

(1)

$f(x) = (-6 + \log_2 x) \log_2 \frac{1}{4x}$ を式変形すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= (-6 + \log_2 x)(-\log_2 x - 2) \\ &= -(\log_2 x)^2 + 4\log_2 x + 12 \end{aligned}$$

となる。ここに $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\left(\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 12 \\ &= \frac{39}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)

$\log_2 x = X$ とおくと, (1)より,

$$f(x) = -X^2 + 4X + 12$$

となる。 $f(x) = 7$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \\ \Leftrightarrow -X^2 + 4X + 12 &= 7 \\ \Leftrightarrow X^2 - 4X - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X - 5) \cdot (X + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= -1, 5 \end{aligned}$$

となる。 $X = \log_2 x$ であるから, $X = -1$ のとき $x = \frac{1}{2}$ であり, $X = 5$ のとき $x = 32$ である。以

上より, $f(x) = 7$ の解は $x = 32, \frac{1}{2}$ である。

(3)

$2 \leq x \leq 7$ であることから, $1 = \log_2 2 \leq X \leq \log_2 7 < 3$ である。また,

$$-X^2 + 4X + 12 = -(X - 2)^2 + 16$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} |2 - 1| &= |2 - 3| \\ &> |2 - \log_2 7| \end{aligned}$$

であることから, $-X^2 + 4X + 12$ は $X = 2$ のとき最大値16をとり, $X = 1$ のとき最小値15をとる。したがって $f(x)$ は $x = 2^2 = 4$ のときに最大値をとり, $x = 2^1 = 2$ のときに最小値をとる。

【6】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	3	2	3	1	9
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	8	3	2	7	2	3

〔解説〕

(1)

$a = \frac{1}{3}$ のとき、放物線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}x^2 + b \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + b \end{aligned}$$

となる。また、放物線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= -\frac{1}{2}x^2 + b \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1 - b &= 0 \end{aligned}$$

の解である。放物線 C_1, C_2 は共有点を1つしか持たないことから、判別式 D を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^2 - \frac{3}{2}(1-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}b - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。このとき x は

$$x = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

であり、 y は

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 &= \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

である。したがって共有点の座標は $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$ である。

(2)

放物線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= \frac{a}{a-1}x^2 + b \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{a-1}x^2 - 2x + 1 - b &= 0 \end{aligned}$$

の解である。共有点が1つしかないことから、判別式 D を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1)^2 - \left(-\frac{1}{a-1}\right) \cdot (1-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1-b}{a-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a-b}{a-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow a=b \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

となる。したがって、放物線 C_2 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{a-1}x^2 + a \\ &= \frac{a}{a-1}(x^2 + a - 1) \\ &= \frac{a}{a-1}(x + \sqrt{1-a})(x - \sqrt{1-a}) \quad (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である。 $0 < a < 1$ より、 $\frac{a}{a-1} < 0$ であり、 x 軸と放物線 C_2 との交点の座標は、 $(\pm\sqrt{1-a}, 0)$ となる。

このとき、放物線 C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \left(\frac{a}{a-1}x^2 + a \right) dx &= \frac{a}{a-1} \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} (x - \sqrt{1-a})(x + \sqrt{1-a}) dx \\ &= \frac{a}{a-1} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \left\{ \sqrt{1-a} - (-\sqrt{1-a}) \right\}^3 \\ &= \frac{4a}{3} \sqrt{1-a} \end{aligned}$$

となり、ここで、 $\frac{4a}{3} \sqrt{1-a} = k$ とおくと、 $0 < a < 1$ より $0 < k$ であることから、 k が最大値をと

るとき k^2 も最大値をとることが必要十分条件である。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{4a}{3} \sqrt{1-a} &= k \quad (0 < a < 1) \\ \Leftrightarrow \frac{16a^2}{9} (1-a) &= k^2 \\ \Leftrightarrow -a^3 + a^2 &= \frac{9}{16} k^2 \end{aligned}$$

であることから、 $-a^3 + a^2$ が最大値をとるとき k^2 は最大値をとる。 $f(x) = -a^3 + a^2$ とすると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3a^2 + 2a \\ &= -3a \left(a - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

となることから、増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	最大	↘	

したがって、 k^2 が最大値をとるのは $a = \frac{2}{3}$ のときであり、このとき k も最大値

$$\frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{3} \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{8}{27} \sqrt{3}$$

をとる。