

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ		
	4	5	4	2	7		
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	0	3	4	0	4	1
(3)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
	2	3	1	3	2	2	3

〔解説〕

(1)

題意より、

$$U = \{10, 12, 14, \dots, 98\}$$

$$V = \{12, 18, 24, \dots, 96\}$$

$$W = \{22, 44, 66, 88\}$$

であるので、

$$n(U) = \frac{98-8}{2} = 45$$

$$n(V) = \frac{96-6}{6} = 15$$

$$n(W) = 4$$

$$n(V \cap W) = 1 \quad (\because V \cap W = \{66\})$$

となる。また、

$$\begin{aligned} n(\overline{V \cup W}) &= n(U) - n(V \cup W) \\ &= n(U) - \{n(V) + n(W) - n(V \cap W)\} \\ &= 45 - (15 + 4 - 1) \\ &= 27 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$11100_{(2)}$ を十進法で表すと、

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 28$$

であるのでこれを五進法で表すと、

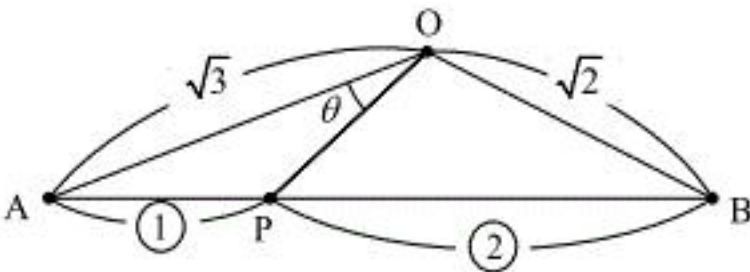
$$28 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$$

より、 $103_{(5)}$ である。さらに、

$$\begin{aligned} 2143_{(5)} + 1343_{(5)} &= 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \\ &= 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5^1 + 6 \cdot 5^0 \\ &= 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 \\ &= 4041_{(5)} \end{aligned}$$

となる。

(3)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+2} \\ &= \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{1}{9} \left(4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ 4 \cdot (\sqrt{3})^2 + 4 \cdot (-2) + (\sqrt{2})^2 \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3} \left(2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2(\sqrt{3})^2 + (-2) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるので、 $\angle AOP = \theta$ とおくと、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{a}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	2	4	4	8	3	6	－	8	3
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
0	－	3	－	6	1	6	2	7	3
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ					
6	6	3	3	9					

〔解説〕

ℓ が C_1 と接するとき、

$$mx+n=-3x^2 \Leftrightarrow 3x^2+mx+n=0$$

の判別式を D_1 とすると、 $D_1=0$ である。よって、

$$D_1=0 \Leftrightarrow m^2-12n=0 \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

である。 ℓ が C_2 と接するとき、

$$mx+n=(x-a)^2+2a \Leftrightarrow x^2-(m+2a)x-n+a^2+2a=0$$

の判別式を D_2 とすると、 $D_2=0$ である。よって、

$$D_2=0 \Leftrightarrow m^2+4am+4n-8a=0 \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

である。①、②より n を消去して、

$$m^2+3am-6a=0 \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

となる。③が m について異なる2実数解をもつとき、③の判別式を D_3 とすると $D_3>0$ である。よって、

$$\begin{aligned} D_3 &> 0 \\ &\Leftrightarrow 9a^2+24a>0 \\ &\Leftrightarrow 9a\left(a+\frac{8}{3}\right)>0 \\ \therefore a &< -\frac{8}{3}, 0<a \end{aligned}$$

となる。さらに③の解と係数の関係より、

$$m_1+m_2=-3a, m_1m_2=-6a$$

である。 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき $m_1m_2=-1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$ である。また、 ℓ_1 と ℓ_2 のなす角の大きさ

が $\frac{\pi}{4}$ であるとき、 $\tan \alpha=m_1, \tan \beta=m_2 \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると、

$$\alpha-\beta=-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

であるので、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta) &= \pm 1 \\ &\Leftrightarrow |\tan(\alpha-\beta)|=1 \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=1 \\ &\Leftrightarrow (1+m_1m_2)^2=(m_1-m_2)^2 \\ &\Leftrightarrow (1+m_1m_2)^2=(m_1+m_2)^2-4m_1m_2 \end{aligned}$$

となる。これに $m_1+m_2=-3a, m_1m_2=-6a$ を代入して、

$$(1-6a)^2=(-3a)^2-4(-6a) \Leftrightarrow 27a^2-36a+1=0$$

となる。これを解いて、

$$a=\frac{6\pm\sqrt{33}}{9}$$

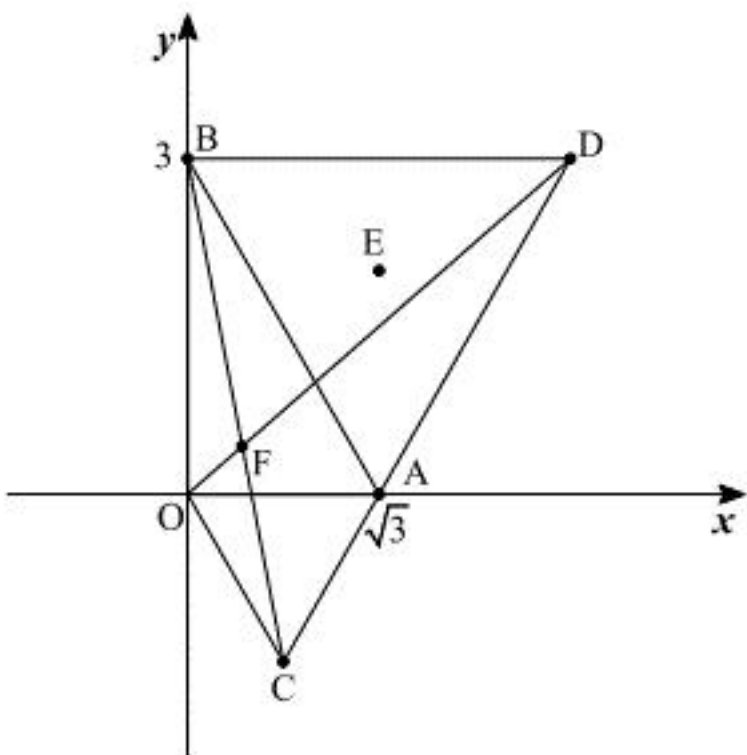
である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
2	3	3	3	2	－	3	2
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
2	2	7	2	3	3	3	2
チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ		
3	7	3	7	2	2		

〔解説〕



$A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 3)$ より三角形 OAB は $OA:AB:BO=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。よって、

$$AB=2\sqrt{3}, \angle OAB=\frac{\pi}{3}$$

であり、三角形 OAC は正三角形であるから、点 C の座標は

$$\left(OA\cos\frac{\pi}{3}, -OA\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

である。さらに、三角形 ABD は正三角形であるので、

$$\begin{aligned}\angle OBD &= \angle OBA + \angle ABD \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、点 D の座標は $AB=BD$ より、 $D(2\sqrt{3}, 3)$ である。ここで点 E は正三角形 ABD

の外接円 S の中心であるので正三角形 ABD の重心と一致するから、

$$E\left(\frac{0+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+0+3}{3}\right)=(\sqrt{3}, 2)$$

であり、 S の半径は AE と等しくその長さは 2 である。また直線 BC は、

$$y-3=\frac{-\frac{3}{2}-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}(x-0)\Leftrightarrow y=-3\sqrt{3}+3$$

と表すことができる。さらに、直線 OD は $y=\frac{3}{2\sqrt{3}}x\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ と表すことができるから、交

点 F の x 座標は、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x=-3\sqrt{3}x+3\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$

であるので、 $F\left(\frac{2\sqrt{3}}{7}, \frac{3}{7}\right)$ となる。よって、

$$\begin{aligned}EF &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{7}\right)^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

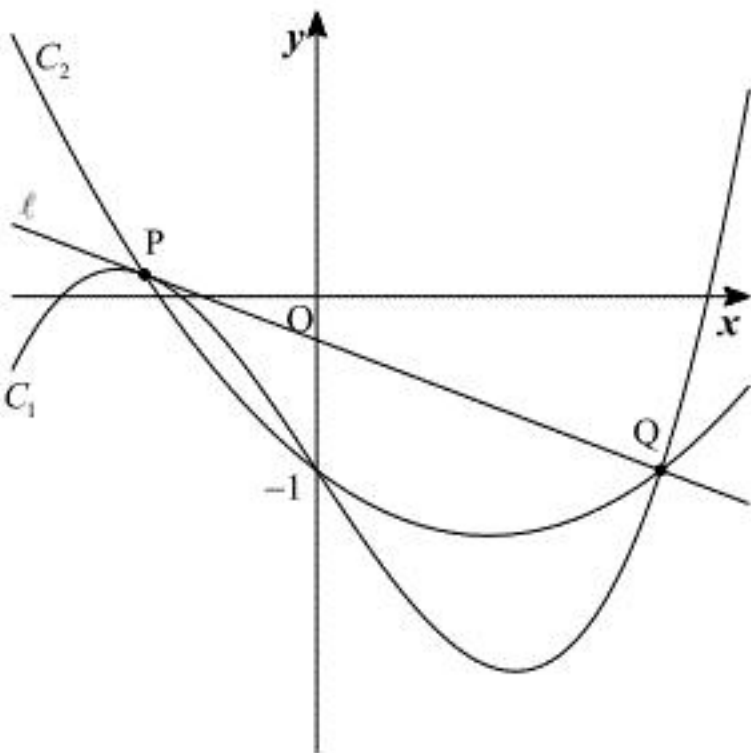
であるから、点 F は円 S の周上にある。

[Ⅳ]

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
0	－	2	3	5	7	2	－
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	6	3	1	2	7	1	6

[解説]



$f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x-1$ より, $f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}=\frac{9}{8}\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ である。よって,

$$a=\frac{9}{8}, b=-\frac{3}{2}$$

となる。さらに, $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

以上より, $f(x)$ は $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ において極小値をとる。また, 点 P における C_1 の接線 ℓ は,

$$f(-1)=\frac{1}{8}, f'(-1)=-\frac{3}{8} \text{ より,}$$

$$y-\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}\{x-(-1)\} \Leftrightarrow y=-\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}$$

と表すことができるので, $c=-\frac{3}{8}, d=-\frac{1}{4}$ となる。 C_1 と ℓ の P 以外の共有点 Q の x 座標は,

$$\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x-1=-\frac{3}{8}x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$$

より, $x=2$ であり, $f(2)=-1$ より $Q(2, -1)$ である。また, $C_2: y=px^2+qx+r$ 上に 3 点

$(0, -1), P\left(-1, \frac{1}{8}\right), Q(2, -1)$ があるので,

$$-1=p\cdot 0^2+q\cdot 0+r \Leftrightarrow r=-1$$

$$\frac{1}{8}=p(-1)^2+q(-1)+r \Leftrightarrow p-q+r=\frac{1}{8}$$

$$-1=p\cdot 2^2+q\cdot 2+r \Leftrightarrow 4p+2q+r=-1$$

の 3 式より $p=\frac{3}{8}, q=-\frac{3}{4}, r=-1$ とわかる。さらに, C_2 と ℓ で囲まれた部分の面積 S は, C_2 と

ℓ がともに $P\left(-1, \frac{1}{8}\right)$ と $Q(2, -1)$ を通ることから,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left| \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 \right) - \left(-\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \right) \right| dx \\ &= \int_{-1}^2 \left| \frac{3}{8}(x-2)(x+1) \right| dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \{2-(-1)\}^3 \\ &= \frac{27}{16} \end{aligned}$$

となる。

〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ				
	3	1	0	3	5				
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ				
	7	1	5	5	7				
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
	2	4	3	3	1	2	7	1	0

〔解説〕

(1)(i)

袋から玉を同時に2個取り出す取り出し方は ${}_5C_2$ 通りあり、これらは同様に確からしい。2個とも赤玉である取り出し方は ${}_3C_2$ 通りであるので求める確率は、 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$ である。

(ii)

袋から玉を同時に3個取り出す取り出し方は ${}_5C_3$ 通りあり、これらは同様に確からしい。1個が白玉で残り2個が赤玉である取り出し方は ${}_2C_1 \cdot {}_3C_2$ 通りであるので求める確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

である。

(2)

さいころを1回投げて玉を1個取り出すとき、袋Aから白玉が取り出される確率は $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{3}$ 、

袋Bから白玉が取り出される確率は $\frac{2}{6} \cdot \frac{0}{4} = 0$ 、袋Cから白玉が取り出される確率は $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

であり、これらは互いに排反である。よって求める確率は、

$$\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

である。また、取り出された玉が白玉であったとき、それが袋Aの玉である確率は、

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \frac{5}{7}$$

である。

(3)(i)

袋Aには最初白玉しか入っていないから、袋Aから袋Bに玉を1個移動させたとき、袋Bには白玉1個と赤玉4個があり、袋Bから袋Cに玉を1個移動させたとき袋Cに白玉か赤玉の1個が入ってくるので、 $(x, y) = (2, 4), (3, 3)$ である。

(ii)

袋Aが $(4, 0)$ から $(3, 0)$ になるのは、さいころの目が(偶数→奇数)または(奇数→偶数)の順に出るときであるから、袋Aに白玉がちょうど3個入っている確率は、

$$2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

となる。さらに、袋Bに白玉が1個も入っていないのは、1回目の操作のさいころの目で次のように場合分けできる。

[1] 1回目に偶数の目が出るとき

1回目の操作の後、袋Bは $(1, 4)$ となるから、2回目の操作は奇数の目が出て袋Bから白玉を取り出せばよく、確率は

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

となる。

[2] 1回目に奇数の目が出るとき

1回目の操作の後、袋Bは $(0, 3)$ となるから、2回目の操作は偶数の目が出ればよく、確率は、

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

となる。

以上[1], [2]より、袋Bに白玉が1個以上入っている確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{10}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
6	9	5	3	0	2	4	4	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
2	1	4	8	5	2	5	2	

〔解説〕

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3\sin^2 t \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -6\cos^2 t \sin t\end{aligned}$$

であるから、 $\frac{dx}{dt} > 0$ となり、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{-6\cos^2 t \sin t}{3\sin^2 t \cos t} \\ &= -\frac{2\cos t}{\sin t}\end{aligned}$$

である。よって点 P における接線は、

$$\begin{aligned}y - 2\cos^3 t &= -\frac{2\cos t}{\sin t}(x - \sin^3 t) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{2\cos t}{\sin t}x + 2\cos t(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ \therefore y &= -\frac{2\cos t}{\sin t}x + 2\cos t\end{aligned}$$

である。よって、 $n = 2\cos t$ となる。ここに $y = 0, x = 0$ をそれぞれ代入して、

$$A(\sin t, 0), B(0, 2\cos t)$$

となる。また、 $\sin t > 0, 2\cos t > 0$ より、

$$\begin{aligned}L &= AB^2 = \sin^2 t + 4\cos^2 t \\ S &= \frac{1}{2}\sin t \cdot 2\cos t = \sin t \cos t\end{aligned}$$

であるから、 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において $u = \tan t$ より $u > 0$ であり、

$$\begin{aligned}R &= \frac{S}{L} \\ &= \frac{\sin t \cos t}{\sin^2 t + 4\cos^2 t} \\ &= \frac{\tan t}{\tan^2 t + 4} \\ &= \frac{u}{u^2 + 4} \\ \frac{dR}{du} &= \frac{u^2 + 4 - u \cdot 2u}{(u^2 + 4)^2} \\ &= \frac{4 - u^2}{(u^2 + 4)^2}\end{aligned}$$

となる。よって R の増減表は以下の通りである。

u	0	…	2	…
$\frac{dR}{du}$	↘	+	0	−
R	↘	↗	$\frac{1}{4}$	↘

上の増減表より、 $u = 2$ のとき、最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。また、 $u = 2 \Leftrightarrow \tan t = 2$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos^2 t &= \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{5} \\ \therefore \cos t &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin t &= \cos t \tan t = \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

である。このときの点 P の座標を $P(x, y)$ とすると、

$$\begin{aligned}x &= \sin^3 t \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \\ &= \frac{8\sqrt{5}}{25} \\ y &= 2\cos^3 t \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

となる。よって、 $P\left(\frac{8\sqrt{5}}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{25}\right)$ である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
4	2	3	4	1	4	5	4
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
0	1	1	6	2	1	2	－

〔解説〕

$f(x) = e^{-x} \sin x$ より,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (e^{-x})' \cdot \sin x + e^{-x} \cdot (\sin x)' \\
 &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\
 &= e^{-x} (\cos x - \sin x) \\
 &= \sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x + \frac{3}{4} \pi \right)
 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq 2\pi$ において,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	－	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}$	↗	0

よって、 $x = \frac{1}{4}\pi$ のとき最大値 $M = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$ をとり、 $x = \frac{5}{4}\pi$ のとき最小値 $m = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}$ をとる。

このとき、

$$\left| \frac{M}{m} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{4}\pi}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}} \right| = e^{\pi}$$

である。また、

$$I = \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - I + C_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ただし、 C_1 は積分定数である。よって、①、②より、

$$\begin{aligned}
 I &= -e^{-x} \sin x + (-e^{-x} \cos x - I + C_1) \\
 \Leftrightarrow I &= \frac{e^{-x} (-\cos x - \sin x)}{2} + \frac{C_1}{2} \\
 \therefore I &= \frac{e^{-x} (-\cos x - \sin x)}{2} + C
 \end{aligned}$$

である。ただし、 $C = \frac{C_1}{2}$ とした。 $0 < x < \pi$ において $f(x) > 0$ 、 $\pi < x < 2\pi$ において $f(x) < 0$ で

あるから、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\pi} f(x) dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \\
 &= \left[\frac{e^{-x} (-\cos x - \sin x)}{2} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-x} (-\cos x - \sin x)}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} (e^{-2\pi} + 2e^{-\pi} + 1) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)^2
 \end{aligned}$$

となる。