

〔I〕

(1)

$a=1$ のとき、放物線 C の方程式は $y=x^2+x$ である。よって、 $x=-1$ のとき $y=0$ 、 $x=3$ のとき $y=12$ であるから

$$P(-1, 0), Q(3, 12)$$

である。 $y=x^2+x$ を微分すると

$$y'=2x+1$$

であるから、 P における接線の方程式は

$$y=\{2 \cdot (-1)+1\}(x+1)=-x-1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、 Q における接線の方程式は

$$y=(2 \cdot 3+1)(x-3)+12=7x-9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より y を消去すると

$$-x-1=7x-9$$

$$\Leftrightarrow 8x=8$$

$$\therefore x=1$$

であり、このとき

$$y=-1-1=-2$$

である。よって、 R の座標は $(1, -2)$ である。

(答) $R(1, -2)$

(2)

$y=x^2+ax$ を微分すると

$$y'=2x+a$$

であるから、 $P(p, p^2+ap)$ における接線の方程式は

$$y=(2p+a)(x-p)+p^2+ap=(2p+a)x-p^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。また、 $Q(q, q^2+aq)$ における接線の方程式は

$$y=(2q+a)(x-q)+q^2+aq=(2q+a)x-q^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より y を消去すると

$$(2p+a)x-p^2=(2q+a)x-q^2$$

$$\Leftrightarrow 2(p-q)x=p^2-q^2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

が得られる。ここで、 P, Q は C 上の異なる点より、 $p-q \neq 0$ であるから、 $\textcircled{5}$ を変形すると、

$$2(p-q)x=p^2-q^2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{(p+q)(p-q)}{2(p-q)}$$

$$\therefore x=\frac{p+q}{2}$$

が得られ、このとき

$$y=(2p+a) \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq + \frac{a(p+q)}{2}$$

である。よって、 $R(5, -4)$ のとき

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2}=5 \\ pq+\frac{a(p+q)}{2}=-4 \end{cases}$$

が成立し、 $pq=21$ であることを利用すると、

$$21+a \cdot 5=-4$$

$$\Leftrightarrow 5a=-25$$

$$\therefore a=-5$$

とわかる。

(答) $a=-5$

【Ⅱ】

(1)

遊びを1回行うとき、A, B, Cが出す目をそれぞれ a, b, c とおく。このとき、Aが6点を得るのは、規則(i)より、

$$a=y \text{ かつ } x+z=6 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つときである。①を満たす (x, y, z) の組は、規則(ii)に注意すると、 $x < y < z$ を満たすから、

$$(x, y, z)=(1, 2, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4)$$

の4組である。各々の組について、

$$(b, c)=(x, z), (z, x)$$

の2通りが存在し、すべての目の出方が同様に確からしいことから、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 2}{6^3} = \frac{1}{27}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{27}$$

(2)

遊びを1回行うとき、Aが0点を得るのは、規則(ii)より、A, B, Cが出した目に等しいものがある場合である。ここで、A, B, Cが出す目に等しいものが無いような出目の組み合わせの総数は、 ${}_6P_3=120$ (通り)であり、求める確率は、この事象の余事象の確率であるから、

$$1 - \frac{120}{6^3} = \frac{4}{9}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{9}$$

(3)

遊びを2回行うとき、Aが合計0点を得るのは、

$$\text{2回ともAが0点を得るとき} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{1回目にAが}t(>0)\text{点を得て、2回目にAが}-t\text{点を得るとき} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{1回目にAが}-t(<0)\text{点を得て、2回目にAが}t\text{点を得るとき} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

のいずれかの場合である。ここで、各回は独立であるから、②の確率は(2)より、 $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$ で

あり、また、③の確率と、④の確率は等しい。したがって、以下では③の確率を考える。規則(ii)に注意すると、③の場合について、2回の遊びの両方で、A, B, Cが出す目は互いに異なるから、1回目に出た相異なる3つの目を $x_1, y_1, z_1(x_1 < y_1 < z_1)$ 、2回目に出た相異なる3つの目を $x_2, y_2, z_2(x_2 < y_2 < z_2)$ とおく。また、1回目の遊びでA, B, Cが出す目をそれぞれ a_1, b_1, c_1 とし、2回目の遊びでA, B, Cが出す目をそれぞれ a_2, b_2, c_2 とする。このとき、1回目にAが t 点を得るのは、

$$a_1 = y_1 \text{ かつ } x_1 + z_1 = t \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ時である。ここで、 $1 \leq x_1$ かつ $3 \leq z_1$ であることから、 $4 \leq t$ である。また、2回目にAが $-t$ 点を得るのは、

$$a_2 = x_2 \text{ または } z_2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

が成り立つ時である。ここで、 $1 \leq x_1, z_1 \leq 6$ であるから、 $1 \leq t \leq 6$ である。⑤、⑥を同時に満たすのは $t=4, 5, 6$ の場合であるから、以下、このそれぞれの場合に、③の確率を求める。

[1] $t=6$ のとき

1回目にAが6点を得て、2回目にAが-6点を得る確率を求める。まず、1回目にAが6点を得るような (a_1, b_1, c_1) の組の総数は(1)より、8通りである。次に、2回目にAが-6点を得るとき、⑥より、

$$a_2 = x_2 = 6 \text{ または } a_2 = z_2 = 6$$

を満たす。ここで、 $x_2 \leq 4$ であるから、 $a_2 = z_2 = 6$ のときのみを考えればよい。このとき、 $1 \leq x_2 < y_2 < z_2 = 6$ を満たすことから、 (x_2, y_2) の組の総数は、 ${}_5C_2=10$ (通り)である。 $(b_2, c_2)=(x_2, y_2), (y_2, x_2)$ の2通りがあることに注意すると、このときの (a_2, b_2, c_2) の組の総数は、20通りである。したがって、③のうち、 $t=6$ であるような確率は、

$$\frac{8}{6^3} \cdot \frac{20}{6^3} = \frac{160}{6^6}$$

である。

[2] $t=5$ のとき

1回目にAが5点を得て、2回目にAが-5点を得る確率を求める。まず、1回目にAが5点を得るとき、⑤より、

$$a_1 = y_1 \text{ かつ } x_1 + z_1 = 5$$

を満たす。(1)と同様にして、これを満たすような (x_1, y_1, z_1) の組を考えると、

$$(x_1, y_1, z_1)=(1, 2, 4), (1, 3, 4)$$

の2組である。 $(b_1, c_1)=(x_1, z_1), (z_1, x_1)$ の2通りがあることに注意すると、 (a_1, b_1, c_1) の組の総数は4通りである。次に、2回目にAが-5点を得るとき、⑥より、

$$a_2 = x_2 = 5 \text{ または } a_2 = z_2 = 5$$

を満たす。[1]と同様に考えて、 $a_2 = z_2 = 5$ のときのみを考えればよい。このとき、 $1 \leq x_2 < y_2 < z_2 = 5$ を満たすことから、 (x_2, y_2) の組の総数は、 ${}_4C_2=6$ (通り)である。 $(b_2, c_2)=(x_2, y_2), (y_2, x_2)$ の2通りがあることに注意すると、このときの (a_2, b_2, c_2) の組の総数は、12通りである。したがって、③のうち、 $t=5$ である確率は、

$$\frac{4}{6^3} \cdot \frac{12}{6^3} = \frac{48}{6^6}$$

である。

[3] $t=4$ のとき

1回目にAが4点を得て、2回目にAが-4点を得る確率を求める。まず、1回目にAが4点を得るとき、⑤より、

$$a_1 = y_1 \text{ かつ } x_1 + z_1 = 4$$

を満たす。(1)と同様にして、これを満たすような (x_1, y_1, z_1) の組を考えると、

$$(x_1, y_1, z_1)=(1, 2, 3)$$

の1組である。 $(b_1, c_1)=(x_1, z_1), (z_1, x_1)$ の2通りがあることに注意すると、 (a_1, b_1, c_1) の組の総数は2通りである。次に、2回目にAが-4点を得るとき、⑥より、

$$a_2 = x_2 = 4 \text{ または } a_2 = z_2 = 4$$

を満たす。まず、 $a_2 = x_2 = 4$ のとき、 $4 = x_2 < y_2 < z_2$ を満たすことから、 (y_2, z_2) の組の総数は、 $(5, 6)$ の1組である。 $(b_2, c_2)=(y_2, z_2), (z_2, y_2)$ の2通りがあることに注意すると、 $a_2 = x_2 = 4$ となる (a_2, b_2, c_2) の組の総数は2通りである。また、 $a_2 = z_2 = 4$ のとき、 $1 \leq x_2 < y_2 < z_2 = 4$ を満たすことから、 (x_2, y_2) の組の総数は、 ${}_3C_2=3$ (通り)である。 $(b_2, c_2)=(x_2, y_2), (y_2, x_2)$ の2通りがあることに注意すると、 $a_2 = z_2 = 4$ となる (a_2, b_2, c_2) の組の総数は6通りである。以上より、2回目にAが-4点を得るような (a_2, b_2, c_2) の組の総数は、8通りである。したがって、③のうち、 $t=4$ である確率は、

$$\frac{2}{6^3} \cdot \frac{8}{6^3} = \frac{16}{6^6}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、③の確率は、

$$\frac{160+48+16}{6^6} = \frac{224}{6^6} = \frac{7}{1458}$$

である。求める確率は、②、③、④の確率の和であるから、

$$\frac{16}{81} + \frac{7}{1458} + \frac{7}{1458} = \frac{151}{729}$$

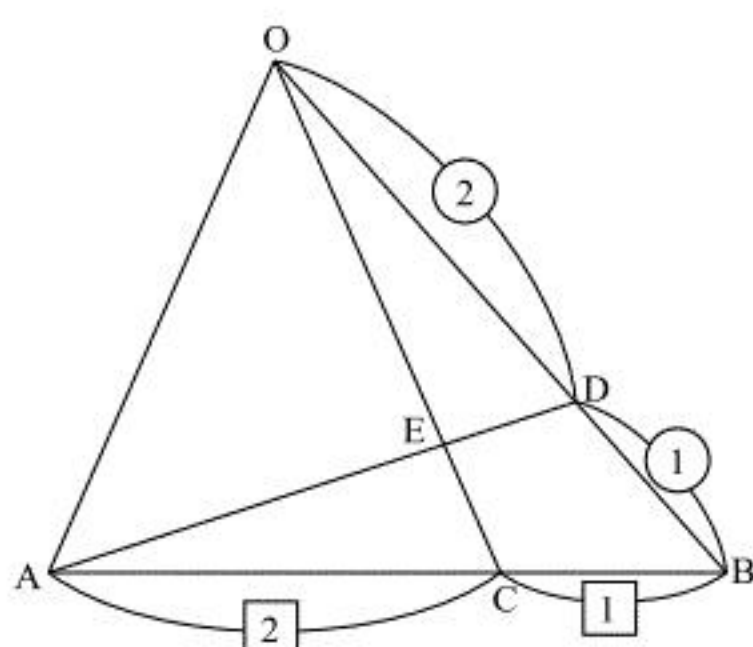
である。

$$\text{(答)} \quad \frac{151}{729}$$

〔Ⅲ〕

(1)

(i)より、点Cは線分ABを2:1に内分する点であり、(ii)より点Dは線分OBを2:1に内分する点である。よって、三角形OABおよび点C, D, Eを図示すると以下のようになる。



三角形OCBと直線DAにメネラウスの定理を用いると

$$\begin{aligned}\frac{OD}{DB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CE}{EO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CE}{EO} &= 1 \\ \therefore 3CE &= EO\end{aligned}$$

となる。したがって、上図と(i)より

$$\overrightarrow{OE} = \frac{OE}{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = \left(\frac{OE}{OE+CE} \right) \left(\frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} \right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

(2)

(i)の両辺の大きさを二乗すると、(iii)より

$$\begin{aligned}9|\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow 36 &= 4 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 &= 8 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が得られる。また、(iii)の $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}| = 2$ の両辺を二乗すると、(ii), (iii)より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + |\overrightarrow{OD}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 &= 4 \\ \therefore 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - |\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。①+②より

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 8 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 2\end{aligned}$$

が得られ、これを①へ代入すると

$$\begin{aligned}2 + |\overrightarrow{OB}|^2 &= 8 \\ \therefore |\overrightarrow{OB}|^2 &= 6\end{aligned}$$

が得られる。以上より、三角形OABの面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6 - 4} = \sqrt{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{5}$$