

【I】

(1)

与えられた不等式を変形すると、

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 4y + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 \leq 1$$

となるから、領域 D は点 $(\sqrt{3}, 2)$ を中心とする半径 1 の円の周上及びその内部である。 $b = 1$ の

とき、 ℓ は

$$ax + y = 1 \Leftrightarrow y = -ax + 1$$

であり、これは点 $(0, 1)$ を通る傾き $-a$ の直線である。領域 D と ℓ が共有点をもつとき、点

$(\sqrt{3}, 2)$ と ℓ の距離を d とすると

$$d \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}a + 2 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{3}a + 1| \leq \sqrt{a^2 + 1}$$

を満たす。上式は両辺正であるから両辺 2 乗して、

$$|\sqrt{3}a + 1|^2 \leq a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 \leq a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2\sqrt{3}a \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a(a + \sqrt{3}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq 0$$

となる。したがって、 $b \neq 0$ より「 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ 」も満たしているから、 a のとりうる値の範囲は $-\sqrt{3} \leq a \leq 0$ である。

(答) $-\sqrt{3} \leq a \leq 0$

(2)

$a^2 + b^2 = 1$ のとき、(1)と同様に考えると、領域 D と ℓ が共有点をもつとき、

$$d \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}a + 2b - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{3}a + 2b - 1| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{3}a + 2b - 1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq b \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}a + 1$$

を満たす。ここで、円 $a^2 + b^2 = 1$ と直線 $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$ の交点の座標は、

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

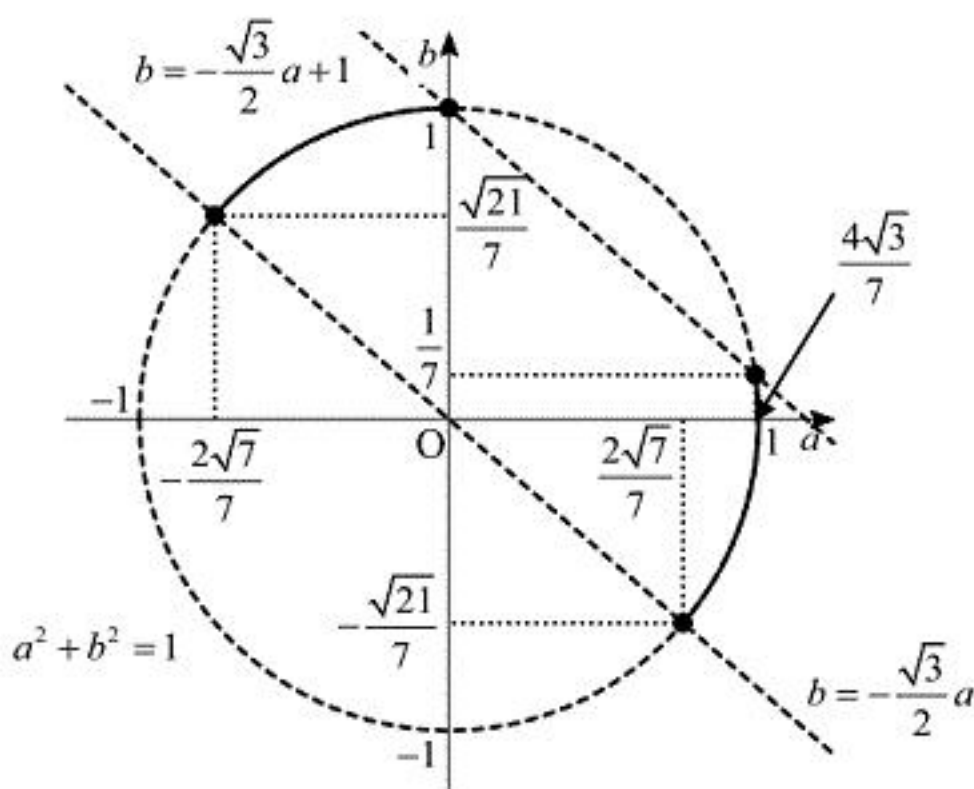
$$\therefore (a, b) = \left(\pm \frac{2\sqrt{7}}{7}, \mp \frac{\sqrt{21}}{7} \right) \text{ (複号同順)}$$

であり、円 $a^2 + b^2 = 1$ と直線 $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}a + 1$ の交点の座標は、

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2}a + 1 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = (0, 1), \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

であるから、条件を満たす点 (a, b) の存在範囲を ab 平面上で図示すると以下の実線部および黒点のようになる。



(答) 前図

【Ⅱ】

(1)

2回目の取り出しで得点が決まるのは、1回目に取り出した球に書かれた数より2回目に取り出した球に書かれた数の方が大きい場合である。この条件を満たす数は、左から1回目とすると、

- (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
- (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
- (3, 4), (3, 5), (3, 6)
- (4, 5), (4, 6)
- (5, 6)

の15通りある。よって、求める確率は、

$$\frac{15}{6 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

4回目の取り出しで得点が決まり、かつ、その得点が2点であるとき、4回目に取り出した球に書かれた数は2である。また、4回目の取り出しで得点が決まるということは3回目に取り出した球に書かれた数は2より小さい数でなければならない、すなわち1しかあり得ない。ここで、2回目に取り出した球に書かれた数は必ず1より大きいから、1回目に取り出した球に書かれた数の方が2回目に取り出した球に書かれた数よりも大きければ条件を満たす。したがって、4回目の取り出しで得点が決まり、かつ、その得点が2点である場合は、(1)と同様の表記をすると、

- (6, 5, 1, 2), (6, 4, 1, 2), (6, 3, 1, 2)
- (5, 4, 1, 2), (5, 3, 1, 2)
- (4, 3, 1, 2)

の6通りある。よって、求める確率は、

$$\frac{6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{60}$$

である。

(答) $\frac{1}{60}$

(3)

得点が2点である事象のうち、何回目の取り出しで得点が決まったかで場合分けをする。

[1] 2回目の取り出しで得点が2点に決まる場合

(2)と同様に考えると、1回目に取り出した球に書かれた数は1しかあり得ない。したがって、2回目の取り出しで得点が2点に決まるのは、(1, 2)という取り出し方のみであるから、その確率は、

$$\frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$$

である。

[2] 3回目の取り出しで得点が2点に決まる場合

2回目に取り出した球に書かれた数は1しかあり得ない。そして、1回目に取り出した球に書かれた数は1より必ず大きいから、2回目の取り出しで得点が決まることはない。これより、3回目の取り出しで得点が2点に決まるのは、

- (3, 1, 2), (4, 1, 2), (5, 1, 2), (6, 1, 2)

の4通りある。したがって、その確率は、

$$\frac{4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{30}$$

である。

[3] 4回目の取り出しで得点が2点に決まる場合

(2)で求めた通り、 $\frac{1}{60}$ である。

[4] 5回目の取り出しで得点が2点に決まる場合

4回目に取り出した球に書かれた数は1しかあり得ない。そして、1回目から3回目までに取り出した球に書かれた数が順に小さくなっていけば3回目までの取り出しで得点が決まることはない。これより、5回目の取り出しで得点が2点に決まるのは、

- (6, 5, 4, 1, 2), (6, 5, 3, 1, 2), (6, 4, 3, 1, 2), (5, 4, 3, 1, 2)

の4通りある。したがって、その確率は、

$$\frac{4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{180}$$

である。

[5] 6回目の取り出しで得点が2点に決まる場合

5回目に取り出した球に書かれた数は1しかあり得ない。そして、1回目から4回目までに取り出した球に書かれた数が順に小さくなっていけば、4回目までの取り出しで得点が決まることはない。これより、6回目の取り出しで得点が2点に決まるのは、

- (6, 5, 4, 3, 1, 2)

のみである。したがって、その確率は、

$$\frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{720}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、得点が2点である確率は、各場合が排反であるから

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{180} + \frac{1}{720} = \frac{13}{144}$$

である。したがって、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{60}}{\frac{13}{144}} = \frac{12}{65}$$

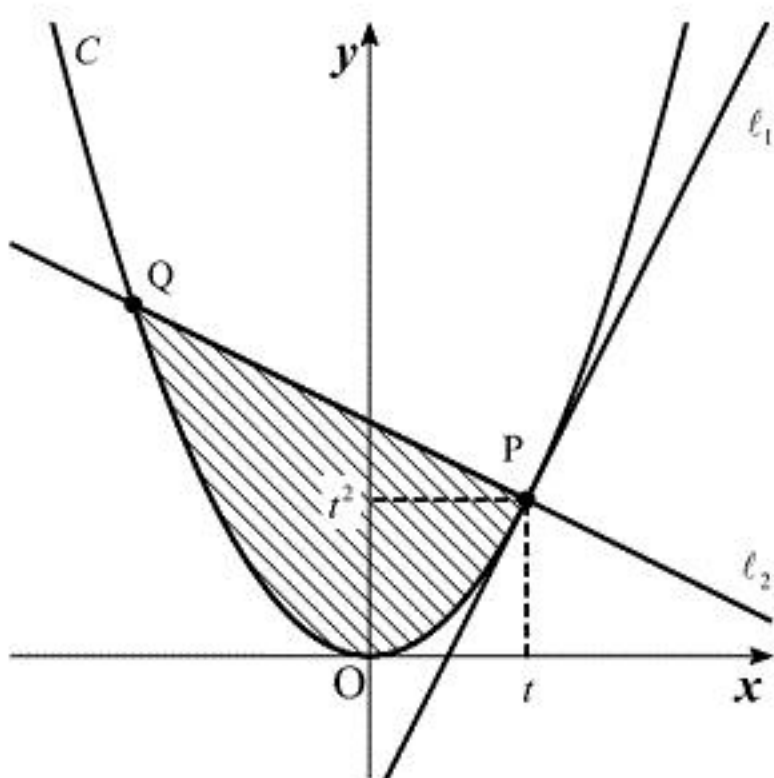
である。

(答) $\frac{12}{65}$

〔Ⅲ〕

(1)

以下に、放物線 C および直線 ℓ_1, ℓ_2 、点 P, Q を図示する。また、 C と ℓ_2 に囲まれた部分を斜線部で示す。



$y = x^2$ のとき $y' = 2x$ であるから、 $P(t, t^2)$ における接線 ℓ_1 の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

となる。また、 ℓ_2 の方程式は、

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

となる。ここで、 $t = 1$ のとき $\ell_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ であるから、放物線 C と直線 ℓ_2 の方程式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

が得られる。点 Q の x 座標は 1 ではないから、点 Q の x 座標は $x = -\frac{3}{2}$ となる。 $x = -\frac{3}{2}$ を $y = x^2$ に代入すると $y = \frac{9}{4}$ となる。よって、点 Q の座標は $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ である。また、 S は上図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2\right) dx \\ &= -\int_{-\frac{3}{2}}^1 (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left\{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 \\ &= \frac{125}{48} \end{aligned}$$

となる。

(答) $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), S = \frac{125}{48}$

(2)

(1)より、放物線 C と直線 ℓ_2 の方程式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2t}x - t\left(t + \frac{1}{2t}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{x + \left(t + \frac{1}{2t}\right)\right\}(x - t) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= t, -\left(t + \frac{1}{2t}\right) \end{aligned}$$

となる。点 Q の x 座標は t ではないから、点 Q の x 座標は $x = -\left(t + \frac{1}{2t}\right)$ である。 S は上図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\left(t + \frac{1}{2t}\right)}^t \left(-\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} - x^2\right) dx \\ &= -\int_{-\left(t + \frac{1}{2t}\right)}^t (x - t)\left\{x + \left(t + \frac{1}{2t}\right)\right\} dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \left\{t + \left(t + \frac{1}{2t}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3 \end{aligned}$$

となるから、 $2t + \frac{1}{2t}$ が最小となる t の値を求めればよい。ここで、 $t > 0$ より $2t > 0, \frac{1}{2t} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$2t + \frac{1}{2t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} = 2 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。また、等号は

$$\begin{aligned} 2t &= \frac{1}{2t} \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} (\because t > 0) \end{aligned}$$

のとき成立する。①より S が最小となるのは $t = \frac{1}{2}$ のときである。

(答) $t = \frac{1}{2}$