

【I】

(1)

与式より、

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^2 - (a+1)x + a \\ &= (x-1)(x-a)\end{aligned}$$

であるから、増減表は以下の通りである。

[1] $a > 1$ のとき

増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

となる。

[2] $a = 1$ のとき

増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

となる。

[3] $a < 1$ のとき

増減表は

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

となる。

以上[1], [2], [3]から、条件を満たす a の範囲は、

$$a < 1, 1 < a$$

である。

(答) $a < 1, 1 < a$

(2)

極大値を $M(a)$ 、極小値を $m(a)$ とする。(1)の増減表より、

[1] $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned}M(a) &= f(1) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(a+1) + a - 1 \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{7}{6}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}m(a) &= f(a) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}(a+1)a^2 + a^2 - 1 \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 1\end{aligned}$$

である。

[2] $a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}M(a) &= f(a) \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 1\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}m(a) &= f(1) \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{7}{6}\end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、極大値と極小値は求まる。

$a < 1$ のとき	極大値	$-\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 1$
	極小値	$\frac{1}{2}a - \frac{7}{6}$
$a > 1$ のとき	極大値	$\frac{1}{2}a - \frac{7}{6}$
	極小値	$-\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 1$

(答)

(3)

(2)の結果より、

[1] $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a - \frac{7}{6} &= -\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

である。これは $a > 1$ を満たす。

[2] $a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 1 &= -\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-2)^2 &= 0\end{aligned}$$

である。 $a < 1$ より、 $a = -1$ となる。

以上[1], [2]より、条件を満たす a の値は、

$$a = -1, \frac{5}{3}$$

である。

(答) $a = -1, \frac{5}{3}$

〔Ⅱ〕

(1)①

東への次の分岐点までの移動を→, 北への次の分岐点までの移動を↑で表す。また, P から A への移動と A から Q への移動で分けて考える。P から A への移動について, 最短の道順で行くとき, →を1回と↑を3回行えば良い。並び替えを考えると, P から A への最短の道順は ${}_4C_1=4$ (通り)存在すると分かる。同様に考えて A から Q までの移動については, →を4回と↑を1回行えばよい。よって, その道順は ${}_5C_1=5$ (通り)存在する。以上より, 求める場合の数は,

$$4 \cdot 5 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 20 通り

②

A または B を通過して Q に行く場合の数は, A を通過して Q に行く場合の数と B を通過して Q に行く場合の数の和から, A と B をともに通過して Q に行く場合の数を引くことで求まる。まず, A を通過して Q に行く場合の数については先の問題から 20 通りである。次に B を通過して Q に行く場合の数について考える。これは P から B への移動と B から Q への移動で分けて考えればよい。P から B への移動については, →を4回, ↑を3回行う場合で, これは ${}_7C_3=35$ (通り)である。B から Q への移動については, →を1回, ↑を1回行う場合で, これは ${}_2C_1=2$ (通り)である。よって, B を通過して Q に行く場合の数は,

$$35 \cdot 2 = 70 \text{ (通り)}$$

である。次に A と B をともに通過して Q に行く場合の数を考える。P から Q までの最短の道順では→と↑しか行わないので, P, A, B, Q の順で通過しなければならない。P から A, B から Q までの移動の道順は今までの議論からそれぞれ 4 通り, 2 通りである。A から B までの移動については, →を3回行い↑を行わないので, これは1通りである。よって, A と B をともに通過して Q に行く場合の数は,

$$4 \cdot 1 \cdot 2 = 8 \text{ (通り)}$$

である。以上より求める場合の数は,

$$20 + 70 - 8 = 82 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 82 通り

(2)①

さいころを投げたとき, 目の出方は全部で 6 通りあり, これらは同様に確からしく起こる。ここで, さいころを投げて 2 以下の目が出たら→を, それ以外なら↑を行うので, 1 回の操作につき確率 $\frac{1}{3}$ で→, 確率 $\frac{2}{3}$ で↑が行われる。各操作では東か北にしか進まないで, A を通過するのは全 9 回の操作の内, 最初の 4 回で→を1回, ↑を3回行ったときである。この確率は,

$${}_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

となる。

(答) $\frac{32}{81}$

②

Q に行く確率は, 全 9 回の操作の内→を5回, ↑を4回行う確率であるから,

$${}_9C_5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{224}{2187}$$

となる。

(答) $\frac{224}{2187}$

③

求める確率は, 全 9 回の操作の内, 最初の 4 回で A に行き, 残りの 5 回で A から Q に行くような確率である。まず, 最初の 4 回で A に行く確率については先の問題から $\frac{32}{81}$ である。さら

に, 残りの 5 回で A から Q に行くような確率は, →を4回, ↑を1回行う確率であるから,

$${}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

となる。以上より求める確率は,

$$\frac{32}{81} \cdot \frac{10}{243} = \frac{320}{19683}$$

となる。

(答) $\frac{320}{19683}$

〔Ⅲ〕

(1)

$p \geq 0, q \geq 0, t \geq 0, 1-t \geq 0$ であるので $\sqrt{tp+(1-t)q} \geq 0, t\sqrt{p}+(1-t)\sqrt{q} \geq 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\sqrt{tp+(1-t)q} &\geq t\sqrt{p}+(1-t)\sqrt{q} \\ \Leftrightarrow tp+(1-t)q &\geq t^2p+(1-t)^2q+2t(1-t)\sqrt{pq} \\ \Leftrightarrow tp+(1-t)q-t^2p-(1-t)^2q-2t(1-t)\sqrt{pq} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t(1-t)p+(1-t)\{1-(1-t)\}q-2t(1-t)\sqrt{pq} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t(1-t)(p+q-2\sqrt{pq}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t(1-t)(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 &\geq 0\end{aligned}$$

であるので、 $t(1-t)(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 \geq 0$ を示せばよい。 $t \geq 0, 1-t \geq 0, (\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 \geq 0$ より

$t(1-t)(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 \geq 0$ である。以上より $\sqrt{tp+(1-t)q} \geq t\sqrt{p}+(1-t)\sqrt{q}$ であることが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i} &\geq \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i}+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{x_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^nx_i+\frac{1}{n+1}x_{n+1}} &\geq \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i}+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{x_{n+1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i+\frac{1}{n+1}x_{n+1}} &\geq \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i}+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{x_{n+1}} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形することができる。ここで $p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i, q=x_{n+1}, t=\frac{n}{n+1}$ とおくと、 $x_i \geq$

$0 (i=1, 2, \dots, n+1)$ より $p \geq 0, q \geq 0, 1 \geq t \geq 0$ を満たす。このとき①は

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \sqrt{tp+(1-t)q} \geq t\sqrt{p}+(1-t)\sqrt{q} \quad \dots \textcircled{2}$$

(証明終)

(3)

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i} \quad \dots \textcircled{3}$$

とおく。③がすべての自然数 n で成立することを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\sqrt{\frac{1}{1}x_1} = \frac{1}{1}\sqrt{x_1} \text{ より } \textcircled{3} \text{ が成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき

③が成り立つと仮定すると

$$\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^kx_i} \geq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\sqrt{x_i} \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i}-\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{x_i} \\ &\geq \frac{k}{k+1}\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^kx_i}+\left(1-\frac{k}{k+1}\right)\sqrt{x_{k+1}}-\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{x_i} \quad (\because (2)) \\ &\geq \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\sqrt{x_i}+\frac{1}{k+1}\sqrt{x_{k+1}}-\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{x_i} \quad (\because (4)) \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^k\sqrt{x_i}-\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^k\sqrt{x_i} \\ &= 0 \\ &\therefore \sqrt{\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}x_i} \geq \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{x_i}\end{aligned}$$

となる。よって $n=k+1$ のときも③が成り立つ。

以上より、すべての自然数 n において $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}$ が成り立つ。

(証明終)