〔Ⅰ〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ							
	1	4	2	7							
(1)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	2	3	7	3	7	6	2	1	1	4	7
(2)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ		
	3	1	4	1	4	7	7	0	5		

〔解説〕

$$\frac{3}{14}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad \cdots ①$$

①の両辺に$14ab$をかけると

$$3ab=14(a+b) \qquad \cdots ②$$

となる。右辺は14の倍数で3と14は互いに素であるから，積abは14の倍数，すなわち2及び7の倍数である。

(1)

aが2の倍数かつ，bが7の倍数であるとすると，m, nを正の整数として，

$$a=2m,\ b=7n$$

とかける。このとき②は，

$$3\cdot 14mn=14(2m+7n)$$
$$\Leftrightarrow (3m-7)n=2m$$
$$\therefore n=\frac{2m}{3m-7}$$

となる。m, nは正の整数であるから，

$$0<3m-7\leqq 2m \qquad \cdots ③$$

が必要である。これを解いて，

$$\frac{7}{3}<m\leqq 7$$

となるが，mは正の整数なので，

$$m=3, 4, 5, 6, 7$$

である。したがって③を満たす整数mの中で最も小さいものは3，最も大きいものは7である。このうち，nも正の整数となるのは

$$(m, n)=(3, 3), (7, 1)$$

のみである。したがって

$$(a, b)=(6, 21) \text{ または } (14, 7)$$

となる。

(2)

aが2の倍数かつ，7の倍数であるとき，mを正の整数として，

$$a=2\cdot 7m=14m$$

とかける。このとき②は，

$$3\cdot 14m\cdot b=14(14m+b)$$
$$\Leftrightarrow (3b-14)m=b$$
$$\therefore m=\frac{b}{3b-14}$$

となる。mは正の整数であるから，

$$0<3b-14\leqq b$$

が必要である。これを解いて

$$\frac{14}{3}<b\leqq 7$$

を得るが，bは正の整数なので，

$$b=5, 6, 7$$

である。このうちmも正の整数となるのは，

$$(m, b)=(5, 5), (1, 7)$$

であるから，

$$(a, b)=(14, 7), (70, 5)$$

を得る。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
9	7	7	7	4	2	3	1	3	3
サ	シ	ス	セ						
4	9	1	1						

〔解説〕

$S_1 = a_1$ であるから，

$$a_1 = \frac{1}{14}(a_1)^2 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{9}{7}$$
$$\Leftrightarrow (a_1)^2 - 7a_1 - 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_1 - 9)(a_1 + 2) = 0$$
$$\therefore a_1 = 9 \ (\because a_1 > 0)$$

となる。また $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから，

$$\frac{1}{14}\left\{(a_{n+1})^2 - (a_n)^2\right\} + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 - 7a_{n+1} - 7a_n = 0$$

が成り立つ。これを整理すると，

$$(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) - 7(a_{n+1} + a_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n - 7)(a_{n+1} + a_n) = 0$$
$$\therefore a_{n+1} - a_n = 7 \ (\because a_{n+1} + a_n > 0)$$

となる。よって，数列 $\{a_n\}$ は初項9，公差7の等差数列であるから

$$a_n = 9 + 7(n-1)$$
$$= 7n + 2$$

を得る。次に $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{21}{a_k a_{k+1}}$ について考えると，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{21}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{21}{a_{k+1} - a_k} \cdot \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 3\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= 3\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= 3\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7n+9}\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{7n+9}$$

となる。$T_n > \frac{8}{27}$ とすると，

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{7n+9} > \frac{8}{27}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7n+9} < \frac{1}{27}$$

となるので，両辺に $27(7n+9)\,(>0)$ をかけると

$$7n + 9 > 81$$
$$\therefore n > \frac{72}{7}$$

を得る。n は正の整数なので，これを満たす最小の n は $n = 11$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	4	1	1	3	1	4	7	6	7
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
4	2	1	1	2	1	1	6		
テ	ト	ナ	ニ	ヌ					
2	2	1	2	1					

〔解説〕

Eは辺ABを1:3に内分する点であるから,

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

である。またGは三角形OABの重心であるから,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

である。$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OE}$であるから,

$$\overrightarrow{OF}=\frac{3}{4}s\vec{a}+\frac{1}{4}s\vec{b} \qquad \cdots ①$$

とかける。また$\overrightarrow{OF}=(1-t)\vec{b}+t\overrightarrow{OC}$であるから,

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\left(\because \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}\right) \qquad \cdots ②$$

ともかける。$\vec{a},\vec{b}$は一次独立であるから, ①, ②より

$$\frac{3}{4}s=\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{4}s=1-t$$

が成り立つ。2式より$s=\frac{4}{7},\ t=\frac{6}{7}$を得る。点Gは△OABの重心であることから線分BCを2:1に内分する点であり,

$$BG=\frac{2}{3}BC$$

である。また点Fは線分BCを$t:(1-t)$すなわち, 6:1に内分する点であるから,

$$BF=\frac{6}{7}BC$$

である。したがって

$$\begin{aligned}GF&=BF-BG\\&=\frac{6}{7}BC-\frac{2}{3}BC\\&=\frac{4}{21}BC\end{aligned}$$

となるので, $\frac{FG}{BC}=\frac{4}{21}$である。三角形DFGの面積$S_2$について

$$S_2=\frac{FG}{BC}\triangle DBC=\frac{4}{21}\cdot\frac{1}{2}\triangle ACB=\frac{4}{21}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S_1=\frac{1}{21}S_1$$

となるので, $\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{21}$である。2直線BCとOGが直交するとき,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OG}=0\\&\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{6}|\vec{a}|^2-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}|\vec{b}|^2=0\\&\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{3}=0\\&\therefore a\cdot b=1\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\&\Leftrightarrow 1=6\cos\theta\\&\therefore\cos\theta=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

を得る。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG}&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}\\&=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)\\&=-\frac{2}{21}\vec{a}+\frac{4}{21}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{FG}|^2&=\left(\frac{2}{21}\right)^2\left(|a|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\right)\\&=\left(\frac{2}{21}\right)^2(9-4+16)\\&=\frac{4}{21}\end{aligned}$$

となり, $|\overrightarrow{FG}|>0$より$|\overrightarrow{FG}|=\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
−	1	4	5	1	4	0	−	2	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
1	1	2	2	3	6				

〔解説〕

曲線 C は点 $(-1, 0)$ を通るので,

$$0=(-1)^3+a(-1)^2-2\cdot(-1)+b$$
$$\therefore b=-a-1$$

となる。したがって,

$$f(x)=x^3+ax^2-2x+(-a-1)$$
$$=(x+1)\{x^2+(a-1)x-a-1\}$$

であるから, $f(x)$ を整式 $x+1$ で割った商は $x^2+(a-1)x-a-1$ となり,

$$p=a-1, q=-a-1$$

である。2次方程式

$$x^2+(a-1)x-a-1=0$$

の判別式を D とすると

$$D=(a-1)^2-4\cdot1\cdot(-a-1)$$
$$=a^2+2a+5$$
$$=(a+1)^2+4>0$$

である。よって, 2次方程式 $x^2+(a-1)x-a-1=0$ は異なる2つの実数解をもつ。また

$$f(x)=(x+a)(x^2+px+q)$$

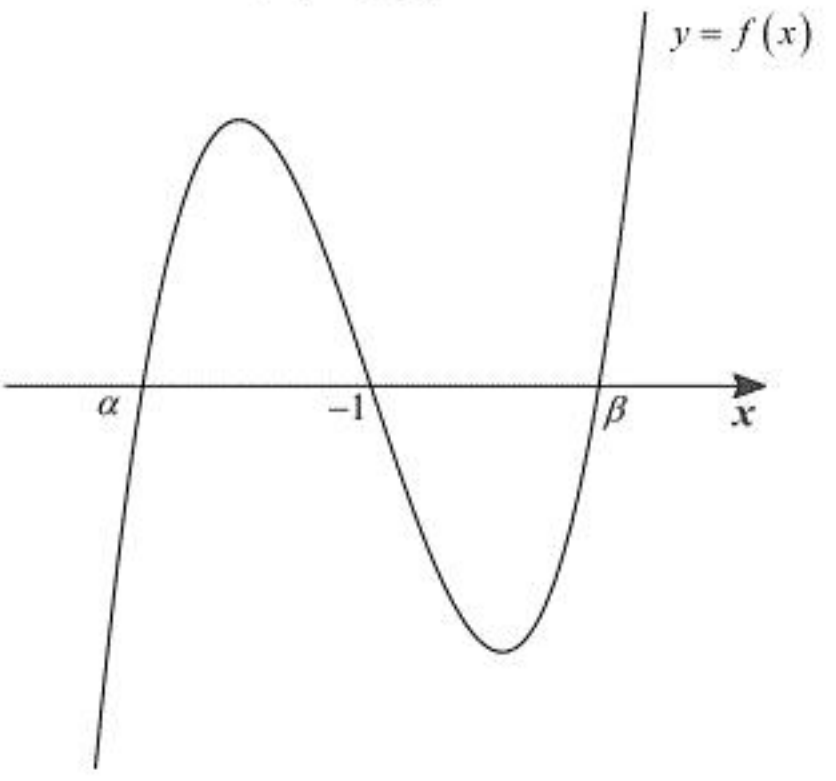
であるから, $x^2+px+q=0$ の2解を α, β とすれば

$$f(\alpha)=0$$

である。

$$f'(x)=3x^2+2ax-2$$

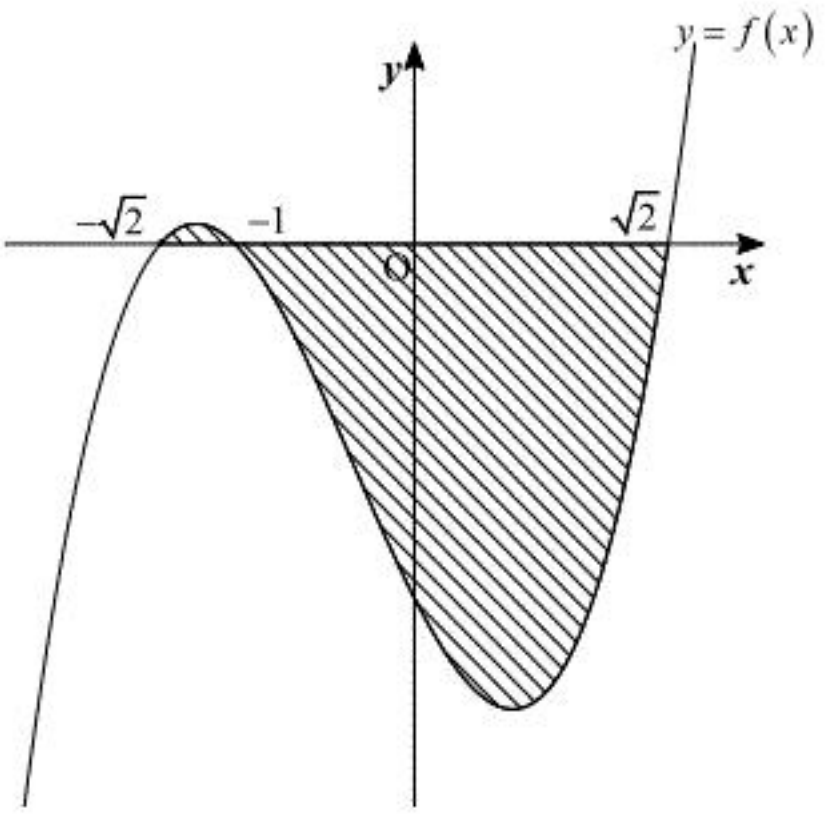
より $f'(-1)=3-2a-2=-2a+1$ である。 $f(x)=0$ の解は $x=-1, \alpha, \beta$ より, $\alpha<-1<\beta$ のとき $f(x)$ の x^3 の項の係数は正であるから, $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



$f'(-1)$ は $x=-1$ における $f(x)$ の微分係数であることから, グラフより $f'(-1)<0$ となることがわかる。このとき, $a>\frac{1}{2}$ である。 $a=1$ のとき,

$$f(x)=x^3+x^2-2x-2$$
$$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+1)$$

となるから, $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



したがって, 求める面積を S とすると S は前図の斜線部の面積であるから

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{\sqrt{2}}\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-\sqrt{2}}^{-1}(x^3+x^2-2x-2)dx-\int_{-1}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2-2x-2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right]_{-\sqrt{2}}^{-1}-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right]_{-1}^{\sqrt{2}}$$
$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-1+2\right)-\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}\right)-\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{23}{6}$$

となる。

〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ					
	3	8					
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	3	2	8	1	3	2	8
(3)	コ	サ					
	2	3					
(4)	シ	ス	セ	ソ			
	2	3	2	8			
(5)	タ	チ	ツ	テ			
	2	5	6	4			

〔解説〕

(1)

袋の中には玉が全部で8個入っており，そのうち3個が赤玉である。これらの玉が取り出される確率は同様に確からしいから，求める確率は $\frac{3}{8}$ である。

(2)

袋から玉を同時に2個取り出すとき，取り出した玉が2個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 7}=\frac{3}{28}$$

である。取り出した玉が2個とも白玉である確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}=\frac{5}{14}$$

であるから，取り出した玉の色が2個とも同じである確率は

$$\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$$

となる。

(3)

袋から玉を1個取り出したとき，取り出した玉に書かれた自然数が偶数である事象を A，白玉である事象を B とおく。事象 A が起きるときに事象 B が起きる条件付き確率

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ を求めればよい。 $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{8}$ であることから，求める確率は

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

となる。

(4)

袋から玉を同時に3個取り出すとき，取り出した玉がすべて白玉である確率は，

$$\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6}=\frac{5}{28}$$

であるから，求める確率は余事象を考えて，

$$1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$$

となる。

(5)

題意の確率を以下の場合に分けて求める。

[1] 1回目に取り出した玉に書かれた自然数が1である場合

[2] 1回目に取り出した玉に書かれた自然数が2である場合

[3] 1回目に取り出した玉に書かれた自然数が3である場合

[4] 1回目に取り出した玉に書かれた自然数が4である場合

[1]のとき

題意を満たすのは2回目に2以上の自然数が書かれた玉を取り出すときであるから，

この場合の確率は $\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8}=\frac{3}{16}$ である。

[2]のとき

題意を満たすのは2回目に3以上の自然数が書かれた玉を取り出すときであるから，

この場合の確率は $\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$ である。

[3]のとき

題意を満たすのは2回目に4以上の自然数が書かれた玉を取り出すときであるから，

この場合の確率は $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{16}$ である。

[4]のとき

題意を満たすのは2回目に5以上の自然数が書かれた玉を取り出すときであるから，

この場合の確率は $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$ である。

[1]~[4]の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{25}{64}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	3	4	1	5	0	7	3	2	8
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
5	2	4	1	6	5	3	4		

〔解説〕

$$f'(x)=-2(\log x)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\log x+3\log x+3x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=-2(\log x)^2-\log x+3$$
$$=-(2\log x+3)(\log x-1)$$

$$f''(x)=-\frac{4\log x}{x}-\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{4\log x+1}{x}$$

となるから，$f'(x)=0$ とすると，

$$2\log x+3=0,\ \log x-1=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{e^3}},\ e$$

であり，$f''(x)=0$ とすると，

$$4\log x+1=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

となる。関数 $f(x)$ が増加の状態にあり，C が上に凸であるのは

$$f'(x)>0 \text{ かつ } f''(x)<0$$

のときである。$f'(x)>0$ となるのは

$$-(2\log x+3)(\log x-1)>0$$
$$\Leftrightarrow(2\log x+3)(\log x-1)<0$$
$$\therefore\frac{1}{\sqrt{e^3}}<x<e$$

のときで，$f''(x)<0$ となるのは，

$$-\frac{4\log x+1}{x}<0$$
$$\Leftrightarrow 4\log x+1>0\ (\because x>0)$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

のときであるから，求める x の値の範囲は $\frac{1}{\sqrt{e^3}}<\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ に注意して，$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}<x<e$ となる。すなわち $\gamma<x<\beta$ である。

不定積分 $\int x(\log x)^2\,dx$ に部分積分法を用いると，

$$\int x(\log x)^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int\frac{1}{2}x^2\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int x\log x\,dx$$

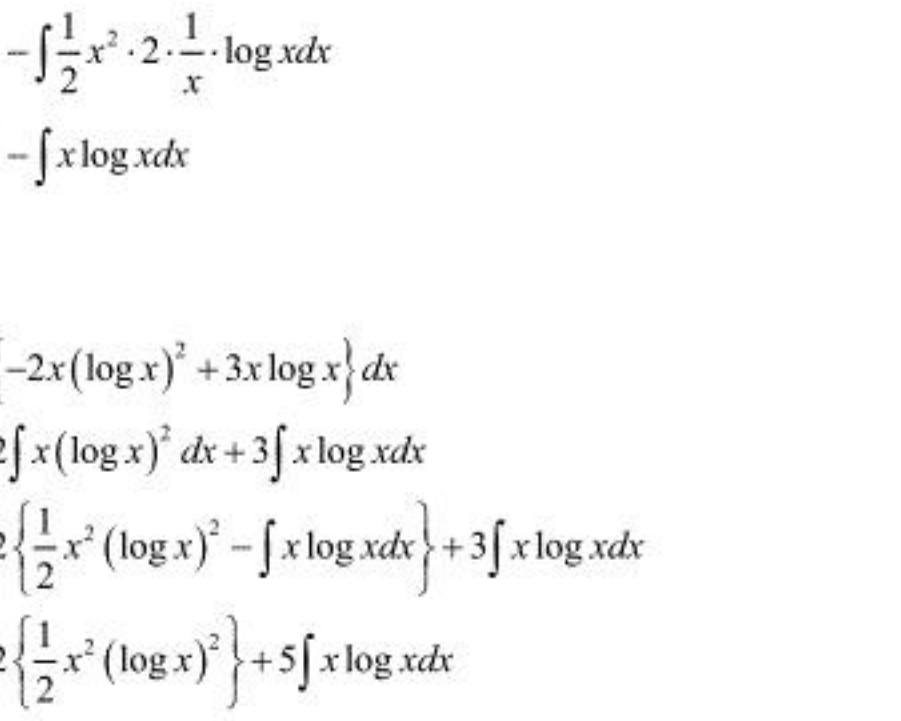
となる。また

$$\int f(x)\,dx=\int\left\{-2x(\log x)^2+3x\log x\right\}dx$$
$$=-2\int x(\log x)^2\,dx+3\int x\log x\,dx$$
$$=-2\left\{\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int x\log x\,dx\right\}+3\int x\log x\,dx$$
$$=-2\left\{\frac{1}{2}x^2(\log x)^2\right\}+5\int x\log x\,dx$$
$$=-2\left\{\frac{1}{2}x^2(\log x)^2\right\}+5\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx\right)$$
$$=-2\left\{\frac{1}{2}x^2(\log x)^2\right\}+5\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right)+K\ \cdots①$$

である。

$$f(x)=-2x\log x\left(\log x-\frac{3}{2}\right)$$

であるから，$f(x)\geqq 0$ となるのは $x>0$ より $0\leqq\log x\leqq\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1\leqq x\leqq\sqrt{e^3}$ のときである。このとき，曲線 C の概形は以下のようになる。



したがって S は斜線部の面積となるから，

$$S=\int_1^{\sqrt{e^3}}f(x)\,dx$$

$$=\left[-2\cdot\frac{1}{2}x^2(\log x)^2+5\left(\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right)\right]_1^{\sqrt{e^3}}\ (\because①)$$

$$=-e^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}e^3\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{4}e^3-\left(-\frac{5}{4}\right)$$
$$=\frac{5+e^3}{4}$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
6	5	4	3	4	2	9	9	4	−
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
3	2	3	2	7	2				

〔解説〕

$$f'(\theta)=-3\sin\theta,\ f''(\theta)=-3\cos\theta$$
$$g'(\theta)=2\cos\theta,\ g''(\theta)=-2\sin\theta$$

であるから，

$$h(\theta)=\frac{(-3\sin\theta)(-2\sin\theta)-2\cos\theta(-3\cos\theta)}{\left\{(-3\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{6\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}{\left\{9\sin^2\theta+4\left(1-\sin^2\theta\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{6}{\left(5\sin^2\theta+4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

である。$h(\theta)$が最大となるのは$5\sin^2\theta+4$が最小となるときで，$0\leqq\sin^2\theta\leqq1$に注意して求めると最大値は$\frac{6}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$である。$h(\theta)$が最小となるのは$5\sin^2\theta+4$が最大となるときであるから求める最小値は$\frac{6}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$である。次に$\theta$を消去して$x$と$y$の関係式を導く。

$$\cos\theta=\frac{x}{3},\ \sin\theta=\frac{y}{2}$$

であるから，

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$
$$\therefore\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

となる。この曲線と直線$2x+3\sqrt{3}y=6$の共有点のx座標は，2式からyを消去して，

$$\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{4}{27}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{2}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow2x^2-3x-9=0$$
$$\Leftrightarrow(2x+3)(x-3)=0$$
$$\therefore x=-\frac{3}{2},3$$

と求まる。また求める回転体の体積Vは

$$V=\int_{-\frac{3}{2}}^{3}\pi y^2dx$$
$$=4\pi\int_{-\frac{3}{2}}^{3}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx$$
$$=4\pi\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_{-\frac{3}{2}}^{3}$$
$$=4\pi\left(2+\frac{11}{8}\right)$$
$$=\frac{27}{2}\pi$$

となる。