

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ				
	1	1	1	3	2	3				
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	5	4	2	0	1	9	1	1	8	

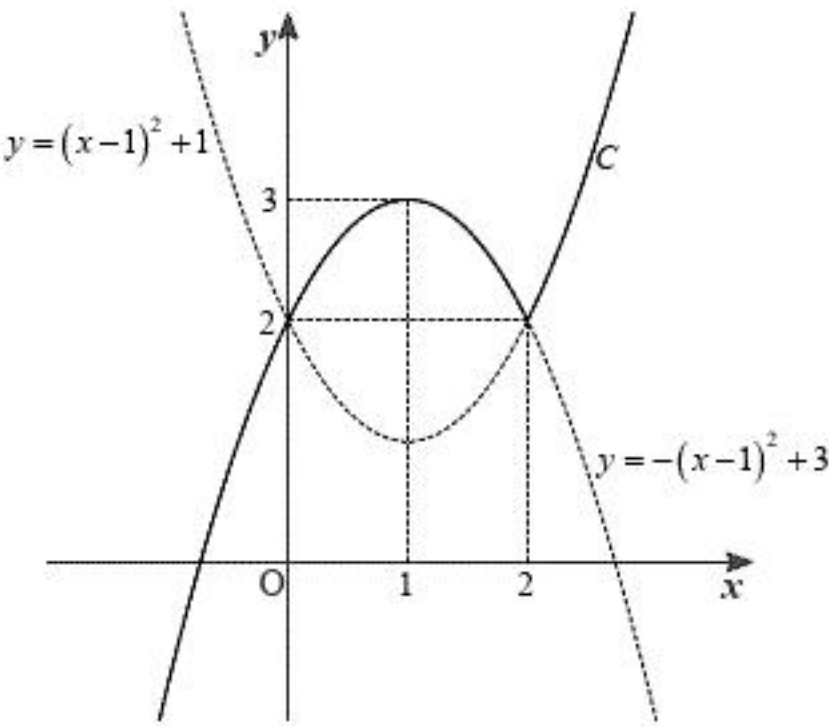
〔解説〕

(1)

[1] $x \geq 2$ のとき
 $|x-2|=x-2$ であるから、
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)x+2 \\ &= x^2-2x+2 \\ &= (x-1)^2+1 \end{aligned}$$
となる。

[2] $x < 2$ のとき
 $|x-2|=2-x$ であるから、
$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)x+2 \\ &= -x^2+2x+2 \\ &= -(x-1)^2+3 \end{aligned}$$
となる。

以上[1], [2]より、曲線 C は次のようになる。



よって、 C と直線 $y=k$ の共有点の個数がちょうど2であるような k の値は、
 $k=2, 3$
である。

(2)

数列 $\{b_n\}$ の一般項は、
$$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$
となる。また、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\sum_{k=1}^n b_k = 4 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} - 4$$

である。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、
$$a_n = 1360000 + (-20000)(n-1) = -20000n + 1380000$$
である。このことから、 a_n は n について単調減少することが分かる。また、 a_n が6桁の数であるとすると、

$$\begin{aligned} a_n &< 1000000 \\ \Leftrightarrow 380000 &< 20000n \\ \Leftrightarrow 19 &< n \end{aligned}$$

である。また、 $a_{20} = 980000$ であるから、 a_n が初めて6桁の数になるのは $n=20$ のときである。次に、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 2^{n+1}$ であるので、 b_n は n について単調増加することが分かる。 b_n が7桁の数であるとすると、

$$\begin{aligned} 10^6 &\leq b_n < 10^7 \\ \Leftrightarrow 10^6 &\leq 2^{n+1} < 10^7 \\ \Leftrightarrow 6 &\leq (n+1)\log_{10} 2 < 7 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ より、

$$\begin{aligned} \frac{6}{0.302} &< \frac{6}{\log_{10} 2} < \frac{6}{0.301} \\ \Leftrightarrow \frac{3000}{151} &< \frac{6}{\log_{10} 2} < \frac{6000}{301} \\ \Leftrightarrow 19 + \frac{131}{151} &< \frac{6}{\log_{10} 2} < 19 + \frac{281}{301} \\ \frac{7}{0.302} &< \frac{7}{\log_{10} 2} < \frac{7}{0.301} \\ \Leftrightarrow \frac{3500}{151} &< \frac{7}{\log_{10} 2} < \frac{1000}{43} \\ \Leftrightarrow 23 + \frac{27}{151} &< \frac{7}{\log_{10} 2} < 23 + \frac{11}{43} \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は、
$$\begin{aligned} n+1 &= 20, 21, \dots, 23 \\ \Leftrightarrow n &= 19, 20, \dots, 22 \end{aligned}$$

である。従って、 b_n が初めて7桁の数になるのは $n=19$ のときである。よって、 $\textcircled{1}$ は $n=20$ のときも成り立つことに注意すると、 $n=20$ のとき、 a_n は6桁の数であり、 b_n は7桁の数であるから、 $n=20$ のとき $a_n < b_n$ が成り立つ。以上のことから、 a_{18} は7桁以上の数であり、 b_{18} は6桁以下の数であるので、

$$a_{18} > b_{18} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} a_{19} &= 1380000 - 20000 \cdot 19 \\ &= 1000000 \\ &= 10^6 \end{aligned}$$

であり、 $\textcircled{1}$ より
$$b_{19} > 10^6$$

であるから、

$$a_{19} < b_{19} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。従って、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ と、数列 $\{a_n\}$ は n について単調に減少し、数列 $\{b_n\}$ は n について単調に増加することから、 $a_n > b_n$ となるのは $n=1, 2, \dots, 18$ のときである。よって、 $a_n > b_n$ となる正の整数 n の個数は18である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
－	1	1	3	1	2	1	3	3	2	3
シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
3	4	5	4	6	2	1	6	4	3	

〔解説〕

内積の公式より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3} \pi \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot (-1) + 4 \cdot 2^2 \\ &= 13\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{13}$ である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 3|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから、内積の公式より、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}|} \\ &= \frac{1}{1 \cdot \sqrt{13}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{12}{13}$$

である。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

であり、三角形 OAC の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \sin \theta &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。また、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{3}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} (3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{5}{4} \vec{b}\end{aligned}$$

である。よって、問題文のように $\overrightarrow{OF}$ をおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OD} + s \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{OD} + s (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) \\ &= (1-s) \overrightarrow{OD} + s \overrightarrow{OE} \\ &= (1-s) \frac{2}{3} \vec{a} + s \left(\frac{3}{4} \vec{a} + \frac{5}{4} \vec{b} \right) \\ &= \frac{8+s}{12} \vec{a} + \frac{5}{4} s \vec{b}\end{aligned}$$

となる。点 F は直線 OC 上の点であったから、 k を実数として

$$\overrightarrow{OF} = k \overrightarrow{OC} = 3k \vec{a} + 2k \vec{b}$$

と表せる。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} \frac{8+s}{12} = 3k \\ \frac{5}{4} s = 2k \end{cases}$$

が成り立つ。 k を消去して解くと

$$\begin{aligned}2 \cdot \frac{8+s}{12} &= 3 \cdot \frac{5}{4} s \\ \Leftrightarrow s &= \frac{16}{43}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ		
	1	2	1		
(2)	エ	オ	カ	キ	
	7	2	6	0	
(3)	ク	ケ	コ	サ	シ
	6	0	5	6	6
(4)	ス	セ	ソ	タ	
	3	4	5	6	
(5)	チ	ツ	テ		
	3	5	6		

〔解説〕

(1) (X, Y) を D に含まれる格子点とすると、 X, Y はそれぞれ 0 以上 10 以下の 11 個の整数をとり得るから、 D に含まれる格子点の総数は

$$11^2 = 121$$

である。

(2)

(1)の結果から、 D に含まれる格子点の中から異なる 2 つの格子点を選ぶ選び方の総数は

$${}_{121}C_2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 7260$$

である。

(3)

$n_1 = n_2 = k$ のとき、 2 つの格子点はそれぞれ m_1, m_2 の値から決まるが、この選び方の総数は ${}_{11}C_2 = 55$ である。 k は 0 以上 10 以下の 11 個の整数をとるから、 $n_1 = n_2$ となる選び方の総数は

$$11 \cdot 55 = 605$$

である。また、 $n_1 = n_2 = k$ のとき、選んだ 2 点の距離が 5 となるのは

$$(m_1, m_2) = (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)$$

の 6 通りの場合である。よって、 $n_1 = n_2$ であり、かつ、選んだ 2 点の距離が 5 となる選び方の総数は、

$$11 \cdot 6 = 66$$

である。

(4)

a, b を正の整数として $m_2 = m_1 + a, n_2 = n_1 + b$ とおく。このとき a, b は自然数である。 2 点の距離が 5 であるとする

$$a^2 + b^2 = 25$$

となる。これを満たすのは $(a, b) = (3, 4), (4, 3)$ のみである。また、 $m_2 = m_1 + 3, n_2 = n_1 + 4$ とすると、 (m_2, n_2) が D に含まれる格子点であることより

$$0 \leq m_1 \leq 10 \text{ かつ } 0 \leq m_2 \leq 10$$

$$\therefore 0 \leq m_1 \leq 7$$

となる。同様に、 $0 \leq n_1 \leq 6$ である。逆に、このように (m_1, n_1) をとれば問題の条件を満たすような (m_2, n_2) が 1 つだけとれる。よって、 $m_2 = m_1 + 3, n_2 = n_1 + 4$ となる 2 点の選び方の総数は、

$$8 \cdot 7 = 56$$

である。

(5)

[1] $m_1 < m_2, n_1 = n_2$ のとき

(3)の結果より、このとき条件を満たす 2 点の選び方の総数は 66 である。

[2] $m_1 = m_2, n_1 < n_2$ のとき

対称性より、[1]の場合の総数に等しい。よって、このとき条件を満たす選び方の総数は 66 である。

[3] $m_1 < m_2, n_1 < n_2$ のとき

(4)の結果より、このとき $(m_2, n_2) = (m_1 + 3, n_1 + 4)$ となる場合と、 $(m_2, n_2) = (m_1 + 4, n_1 + 3)$ となる場合がある。(4)の結果より、前者の場合の総数は 56 であり、対称性より後者の場合の総数も 56 である。よって、このとき条件を満たす選び方の総数は 112 である。

[4] $m_1 < m_2, n_1 > n_2$ のとき

対称性より、[3]の場合の総数に等しい。よって、このとき条件を満たす選び方の総数は 112 である。

以上[1], [2], [3], [4]より、選んだ 2 点の距離が 5 である選び方の総数は

$$66 + 66 + 112 + 112 = 356$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
6	1	0	2	3	－	1	3	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
8	1	3	1	3	1	2	3	

〔解説〕

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 2x + 2$$

である。よって、 $P(2, 11)$ における C の接線 l_1 の方程式は

$$y = (2 \cdot 2 + 2)(x - 2) + 11$$

$$\therefore y = 6x - 1$$

である。また、 C 上の点 $Q(t, f(t))$ における接線の傾きが 2 であるとき、

$$2t + 2 = 2$$

$$\therefore t = 0$$

である。よって、 $Q(0, 3)$ であり、この点における C の接線 l_2 の方程式は

$$y = 2(x - 0) + 3$$

$$\therefore 2x - y + 3 = 0$$

である。よって、 l_2 の法線ベクトルとして $(2, -1)$ がとれるから $p = -1$ である。よって、直線 l_3 のベクトル方程式は

$$(x, y) = (0, 3) + t(2, -1)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (2t, 3 - t)$$

となる。よって、 $(x, y) = (2t, 3 - t)$ を l_1 の方程式に代入すると、

$$3 - t = 6 \cdot 2t - 1$$

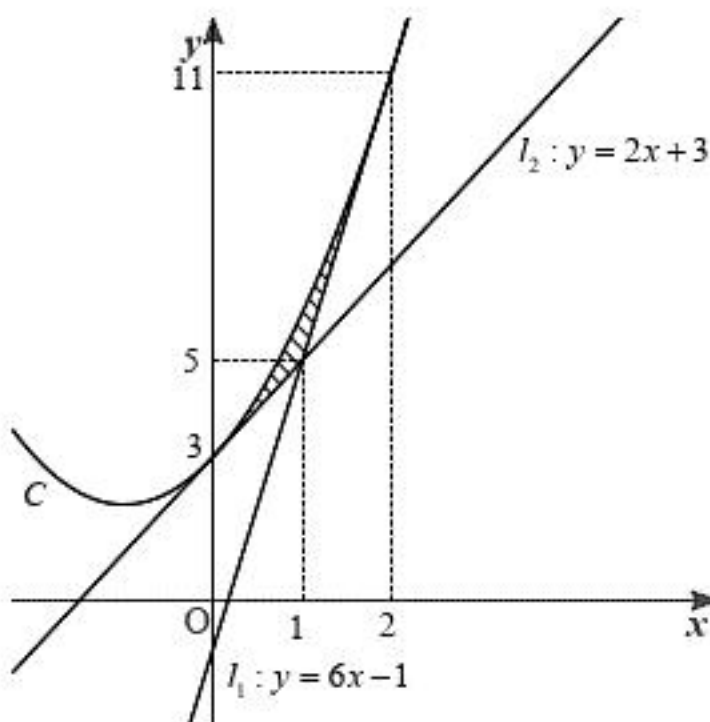
$$\therefore t = \frac{4}{13}$$

となるから、 l_1 と l_3 の交点の x 座標は $2t = \frac{8}{13}$ である。また、 l_1 と l_2 の交点を求めると

$$6x - 1 = 2x + 3$$

$$\therefore x = 1$$

となり、また、 $y = 5$ である。以上より、曲線 C と直線 l_1, l_2 を図示すると次のようになり、 S は斜線部の面積である。



よって、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \{f(x) - h(x)\} dx + \int_1^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \int_0^1 (x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} (2^3 - 1) - 2(2^2 - 1) + 4(2 - 1) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - 6 + 4 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

である。

【V】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
－	4	1	9	－	4	1	1	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
5	0	－	0	1	6	－	2	8

【解説】

与式に $x=7$ を代入すると、

$$\begin{aligned}11\cdot7+19y&=1\\ \therefore y&=-4\end{aligned}$$

となる。よって、 $(x,y)=(7,-4)$ は問題の式を満たす整数の組である。よって、

$$\begin{aligned}11x+19y&=1\\ 11\cdot7+19\cdot(-4)&=1\end{aligned}$$

の辺々引いて移項すると

$$-11(x-7)=19(y+4)$$

となる。 $x-7,y+4$ がそれぞれ整数であり、11 と 19 が互いに素であることより、整数 k を用いて

$$\begin{cases}x-7=19k\\ y+4=-11k\end{cases}$$

と表すことができる。よって、 $(x,y)=(19k+7,-4-11k)$ と表すことができる。また、この表示を用いると

$$\begin{aligned}|x+y|&\leq 100\\ \Leftrightarrow |8k+3|&\leq 100\\ \Leftrightarrow -100\leq 8k+3&\leq 100\\ \Leftrightarrow -\frac{103}{8}=-12.875\leq k\leq \frac{97}{8}=12.125\\ \Leftrightarrow k&=-12,-11,\cdots,12\end{aligned}$$

となるから、 $|x+y|\leq 100$ を満たす組の個数は 25 である。また、 $x>0,y>0$ のとき

$$11x+19y>11+19=30>1$$

となるから、このようになる k は存在しないことが分かる。同様にして、 $x<0,y<0$ であるような k は存在しないことが分かる。 $x<0,y>0$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{cases}19k+7<0\\ -4-11k>0\end{cases}\\ \Leftrightarrow \begin{cases}k<-\frac{7}{19}\\ k<-\frac{4}{11}\end{cases}\\ \Leftrightarrow k<-\frac{7}{19}\end{aligned}$$

となり、 k は整数より、

$$k<0\Leftrightarrow k\text{は負の整数}$$

である。また、 $x>0,y<0$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{cases}19k+7>0\\ -4-11k<0\end{cases}\\ \Leftrightarrow \begin{cases}k>-\frac{7}{19}\\ k>-\frac{4}{11}\end{cases}\\ \Leftrightarrow k>-\frac{4}{11}\end{aligned}$$

となり、 k は整数より、

$$k>-\frac{4}{11}\Leftrightarrow k\text{は}0\text{以上の整数}$$

である。以上のことから、 x,y は異符号であり、これに注意して $|x|+|y|\leq 100$ を考える。

[1] $x<0,y>0$ のとき

このとき $k<0$ である。このもとで、

$$\begin{aligned}|x|+|y|&\leq 100\\ \Leftrightarrow -x+y&\leq 100\\ \Leftrightarrow -(19k+7)+(-4-11k)&\leq 100\\ \Leftrightarrow k&\geq -\frac{37}{10}\\ \Leftrightarrow k&=-3,-2,-1(\because k<0)\end{aligned}$$

となるから、条件を満たす k の個数は 3 である。

[2] $x>0,y<0$ のとき

このとき $k\geq 0$ である。このもとで、

$$\begin{aligned}|x|+|y|&\leq 100\\ \Leftrightarrow x-y&\leq 100\\ \Leftrightarrow (19k+7)-(-4-11k)&\leq 100\\ \Leftrightarrow k&\leq \frac{89}{30}\\ \Leftrightarrow k&=0,1,2(\because k\geq 0)\end{aligned}$$

となるから、条件を満たす k の個数は 3 である。

以上[1],[2]より、 $|x|+|y|\leq 100$ を満たす整数の組 (x,y) の個数は、

$$3+3=6$$

である。また、

$$\begin{aligned}xy&=(19k+7)(-4-11k)\\ &=-209k^2-153k-28\end{aligned}$$

と表すことができる。これは k についての 2 次関数とみることができ、 $t=-209k^2-153k-28$ のグラフは上に凸であり、その軸は

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{153}{209}=-\frac{153}{418}$$

である。軸についての対称性と、 k は整数をとることから、 $-209k^2-153k-28$ は k が $-\frac{153}{418}$ に

一番近い整数のときに最小値をとる。したがって、 $-\frac{1}{2}<-\frac{153}{418}<0$ より、 $k=0$ のときに最小値 -28 をとる。

〔VI〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
0	0	6	3	2	3	5	1
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
3	2	2	－	1	3	3	5

〔解説〕

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = 0$ より,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

である。また、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$ より,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x + 7 + \frac{6}{e^x}} = 0$$

である。また,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x)'(2e^{2x} + 7e^x + 6) - e^x(2e^{2x} + 7e^x + 6)'}{(2e^{2x} + 7e^x + 6)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^{2x} + 7e^x + 6) - e^x(4e^{2x} + 7e^x)}{(2e^{2x} + 7e^x + 6)^2} \\ &= \frac{6e^x - 2e^{3x}}{(2e^{2x} + 7e^x + 6)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x) = 0$ となる x は,

$$\begin{aligned} 6e^x - 2e^{3x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2e^x(3 - e^{2x}) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 3 \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \log 3 = \log \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって、増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$\log \sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって、 $f(\log \sqrt{3})$ は $f(x)$ の極大値であり、最大値でもある。また、不定積分

$$\int f(x) dx$$

は、 $e^x = u$ とおくと $e^x dx = du$ であることより,

$$\int f(x) dx = \int \frac{e^x}{2e^{2x} + 7e^x + 6} dx = \int \frac{1}{2u^2 + 7u + 6} du$$

となる。また,

$$2u^2 + 7u + 6 = (2u + 3)(u + 2)$$

と因数分解ができる。よって,

$$\frac{1}{2u^2 + 7u + 6} = \frac{a}{2u + 3} + \frac{b}{u + 2}$$

とおくと、両辺に $2u^2 + 7u + 6 = (2u + 3)(u + 2)$ をかけて

$$\begin{aligned} 1 &= a(u + 2) + b(2u + 3) \\ \Leftrightarrow 1 &= (a + 2b)u + (2a + 3b) \end{aligned}$$

となる。これが u についての恒等式となるから、両辺の係数を比較して,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 3b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。定積分 $\int_0^{\log \sqrt{3}} f(x) dx$ において $e^x = u$ と変数変換をすると、積分区間の対応は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\log \sqrt{3}$
u	1	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$

よって,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log \sqrt{3}} f(x) dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2u^2 + 7u + 6} du \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{2u + 3} - \frac{1}{u + 2} \right) du \\ &= \left[\log |2u + 3| - \log |u + 2| \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \log(2\sqrt{3} + 3) - \log(2 + \sqrt{3}) - \log 5 + \log 3 \\ &= \log \frac{3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{5(2 + \sqrt{3})} \\ &= \log \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク		
	2	2	2	2	1	2	8	6		
(2)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	6	7	2	3	－	1	2	3	8	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{(1+\cos t)^2+(\sin t)^2} \\&= \sqrt{1+\cos^2 t+\sin^2 t+2\cos t} \\&= \sqrt{2(1+\cos t)} \\&= \sqrt{2\cdot 2\cos^2 \frac{t}{2}} \\&= 2\left|\cos \frac{t}{2}\right|\end{aligned}$$

となる。また、 $0\leqq t\leqq \pi$ より $0\leqq \frac{t}{2}\leqq \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\cos \frac{t}{2}\geqq 0$ ゆえ、

$$r=2\cos \frac{t}{2}$$

となる。また、 $0\leqq t<\pi$ のとき、 z の偏角を θ とおくと、偏角の定義より $r\sin \theta$ は z の虚部であるから

$$r\sin \theta=\sin t$$

である。 $r=2\cos \frac{t}{2}$ であったから、

$$\begin{aligned}r\sin \theta &= \sin t \\ \Leftrightarrow 2\cos \frac{t}{2}\sin \theta &= 2\sin \frac{t}{2}\cos \frac{t}{2} \\ \Leftrightarrow 2\cos \frac{t}{2}\left(\sin \theta-\sin \frac{t}{2}\right) &= 0\end{aligned}$$

となる。 $0\leqq t<\pi$ より、 $\cos \frac{t}{2}>0$ であるから、

$$\sin \theta=\sin \frac{t}{2}$$

となる。また、 $0\leqq t\leqq \pi$ のとき

$$1+\cos t\geqq 0,\sin t\geqq 0$$

であるから、 $0\leqq \theta\leqq \frac{\pi}{2}$ である。以上より、

$$\theta=\frac{1}{2}t$$

を得る。また、

$$\begin{aligned}z^2 &= (1+\cos t)^2+2i(1+\cos t)\sin t+(-1)\sin^2 t \\&= 1+2\cos t+\cos^2 t+2i\sin t+2i\sin t\cos t-\sin^2 t \\&= (\cos 2t+2\cos t+1)+i(\sin 2t+2\sin t)\end{aligned}$$

となる。

(2)

座標平面上の曲線 C は $0\leqq t\leqq \pi$ を満たす媒介変数 t を用いて

$$x=\cos 2t+2\cos t+1$$

$$y=\sin 2t+2\sin t$$

で表されている。よって、 $0<t<\pi$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t-2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t+2\cos t$$

となる。 $\frac{dx}{dt}=0$ とすると、

$$\begin{aligned}-2\sin 2t-2\sin t &= 0 \\ \Leftrightarrow -4\sin t\cos t-2\sin t &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin t(2\cos t+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin t=0,\cos t &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $0<t<\pi$ より、これを満たすのは $t=\frac{2}{3}\pi$ のときである。よって、 x の増減表は次のよ

うになる。

t	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{dt}$		－	0	＋	
x	4		極小		0

よって、 x は $t=\frac{2}{3}\pi$ のとき最小値をとり、その値は

$$\cos \frac{4}{3}\pi+2\cos \frac{2}{3}\pi+1=-\frac{1}{2}$$

である。また、2倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 2t\sin t+\cos 2t\cos t &= 2\sin^2 t\cos t+\cos t(1-2\sin^2 t) \\&= \cos t\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{(-2\sin 2t-2\sin t)^2+(2\cos 2t+2\cos t)^2}dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{4(\sin^2 2t+\cos^2 2t)+4(\sin^2 t+\cos^2 t)+8(\sin 2t\sin t+\cos 2t\cos t)}dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{4+4+8\cos t}dt \\&= \int_0^\pi \sqrt{16\cos^2 \frac{t}{2}}dt \\&= 4\int_0^\pi \left|\cos \frac{t}{2}\right|dt\end{aligned}$$

となり、積分区間において $\cos \frac{t}{2}\geqq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}L &= 4\int_0^\pi \cos \frac{t}{2}dt \\&= 4\left[2\sin \frac{t}{2}\right]_0^\pi \\&= 8\end{aligned}$$

である。