

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ		
	⑥	⑩	⑥	⑥	⑧	⑧		
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	④	⑩	⑤	⑦	①	⑩	②	
(3)	セ	ソ						
	7	2						

【解説】

(1)

$1+\tan x$ について、 $\tan x$ の正の最小の周期は π であるから、 $1+\tan x$ の正の最小の周期も変わらず π である。

$x+\sin x$ について、 $x-1\leq x+\sin x$ かつ $\lim_{x\rightarrow\infty}(x-1)=\infty$ より、追い出しの原理から、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}(x+\sin x)=\infty$$

である。よって $x+\sin x$ は周期関数とはならない。

$|\sin x|$ について、

$$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$$

より、 $|\sin x|$ は π を周期の1つにもつ。一方、 $0<t<\pi$ のとき

$$|\sin t|\neq 0=|\sin 0|$$

であるから、 $|\sin x|$ は π 未満の正の周期はもたない。したがって、 $|\sin x|$ の正の最小の周期は π である。

$\sin x\cos x$ について、 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ と変形できる。 $\sin x$ の正の最小の周期は 2π であるから、 $\sin 2x$ の正の最小の周期は

$$\frac{2\pi}{2}=\pi$$

となり、 $\sin x\cos x$ の正の最小の周期は π である。

$\frac{1}{\sin x}$ について、 $\sin x$ の正の最小の周期は 2π であるから、 $\frac{1}{\sin x}$ の正の最小の周期は 2π である。

$\sin x+\cos 2x$ について、

$$\sin(x+2\pi)+\cos\{2(x+2\pi)\}=\sin x+\cos 2x$$

であるから、 $\sin x+\cos 2x$ は 2π を周期の1つにもつ。一方、 $0<t<2\pi$ のとき、

$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}+t<\frac{3}{2}\pi$ より $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)>-1$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)+\cos\left\{2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right\}&>-1+(-1)\\&=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left\{2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\sin x+\cos 2x$ は 2π 未満の正の周期をもたない。したがって、 $\sin x+\cos 2x$ の周期は 2π となる。

(2)

すべての実数 x について

$$\begin{aligned}f(-x)&=-xe^{-x^2}\\&=-f(x)\end{aligned}$$

である。よって $f(x)$ は奇関数であるから、

$$\int_{-r}^rf(x)dx=0$$

である。また、

$$x^2e^{-x^2}=\frac{-x}{2}\times(-2x)e^{-x^2}=\frac{-x}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$$

であるから、部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_{-r}^rx^2e^{-x^2}dx&=\int_{-r}^r\frac{-x}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)dx\\&=\left[\frac{-x}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_{-r}^r-\int_{-r}^r\frac{-1}{2}e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

と変形できる。 $x<1$ において $e^x<e^{x^2}$ だから $0<\frac{x}{e^{x^2}}<\frac{x}{e^x}$ であり、(b)より $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であるから、

はさみうちの原理より、

$$\lim_{x\rightarrow\infty}xe^{-x^2}=0$$

となる。これと(a)より、

$$\begin{aligned}\lim_{r\rightarrow\infty}\int_{-r}^rx^2e^{-x^2}dx&=\lim_{r\rightarrow\infty}\left(\left[\frac{-x}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_{-r}^r-\int_{-r}^r\frac{-1}{2}e^{-x^2}dx\right)\\&=\lim_{r\rightarrow\infty}\left(-re^{-r^2}+\int_{-r}^r\frac{1}{2}e^{-x^2}dx\right)\\&=0+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}x&=1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\\&\Leftrightarrow x-1=-\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

であるから両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}(x-1)^2&=2+\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow x^2-2x+1=2+\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow x^2-2x-1=\sqrt{2}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。再度両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}(x^2-2x-1)^2&=(\sqrt{2})^2\\&\Leftrightarrow x^4-4x^3+2x^2+4x+1=2\\&\Leftrightarrow x^4-4x^3+2x^2+4x-1=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 X の整式 $X^7-4X^6+2X^5+5X^4-5X^3+3X^2+2X+5$ を $X^4-4X^3+2X^2+4X-1$ で割ると、

$$\begin{aligned}X^7-4X^6+2X^5+5X^4-5X^3+3X^2+2X+5\\=\left(X^4-4X^3+2X^2+4X-1\right)\left(X^3+1\right)+X^2-2X+6\end{aligned}$$

となる。これに $X=x$ を代入して②を用いると、

$$x^7-4x^6+2x^5+5x^4-5x^3+3x^2+2x+5=x^2-2x+6$$

を得る。さらに①を用いると、

$$x^2-2x+6=7+\left(x^2-2x-1\right)=7+\sqrt{2}$$

となる。よって求める値は $7+\sqrt{2}$ である。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	⑦	④	④	⑦	①	⑦
(2)	キ	ク	ケ			
	⑦	①	②			

【解説】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & z^2=1 \\
 & \Leftrightarrow z=\pm 1 \\
 & z^3=1 \\
 & \Leftrightarrow z^3-1=0 \\
 & \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \\
 & \Leftrightarrow z=1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \\
 & z^6=1 \\
 & \Leftrightarrow z^6-1=0 \\
 & \Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+1)=0 \\
 & \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1)=0 \\
 & \Leftrightarrow z=\pm 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 S &= \{\pm 1\} \\
 T &= \left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\} \\
 R &= \left\{\pm 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$-1\in S, S\cap T=\{1\}, S\cap\overline{R}=\emptyset$$

となる。

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\in R \text{であるが, } S\cup T=\left\{\pm 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\} \text{であるから } \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\notin S\cup T \text{となる。よって}$$

$S\cup T\neq R$ であり、命題「 $S\cup T=R$ 」は偽である。

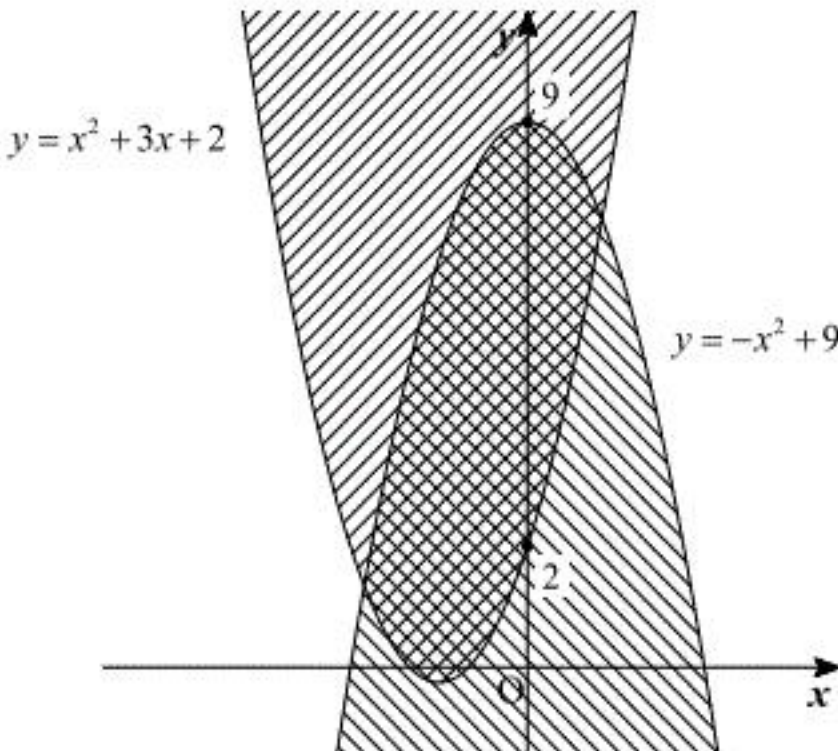
$\overline{S}\cap T\subset T$ かつ $T\subset R$ であるから $\overline{S}\cap T\subset R$ となる。よって命題「 $\overline{S}\cap T\subset R$ 」は真である。

$$\overline{S}\cap\overline{T} \text{を満たすのは } \pm 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{以外のすべての複素数であるから, } (\overline{S}\cap\overline{T})\cap R=\left\{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\} \text{と}$$

なる。よって、命題「 $(\overline{S}\cap\overline{T})\cap R=\emptyset$ 」は偽である。

(2)

条件 p と条件 q の表す範囲を図示すると下図のようになる(境界含む)。ただし、右上がりの斜線が条件 p 、右下がりの斜線が条件 q を表す。

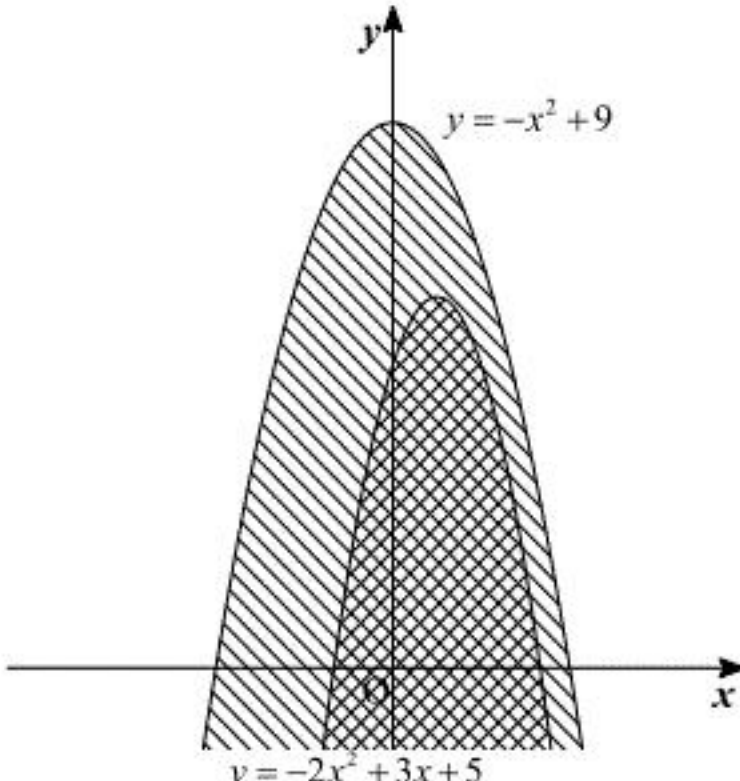


よって p であることは q であるための必要条件でも十分条件でもない。

次に、すべての実数 x に対して

$$\begin{aligned}
 -x^2+9-(-2x^2+3x+5) &= x^2-3x+4 \\
 &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

が成り立つことに注意して条件 q と条件 r を図示すると下図のようになる。ただし、右下がりの斜線が条件 q 、右上がりの斜線が条件 r を表す。



よって q であることは r であるための必要条件であるが十分条件ではない。

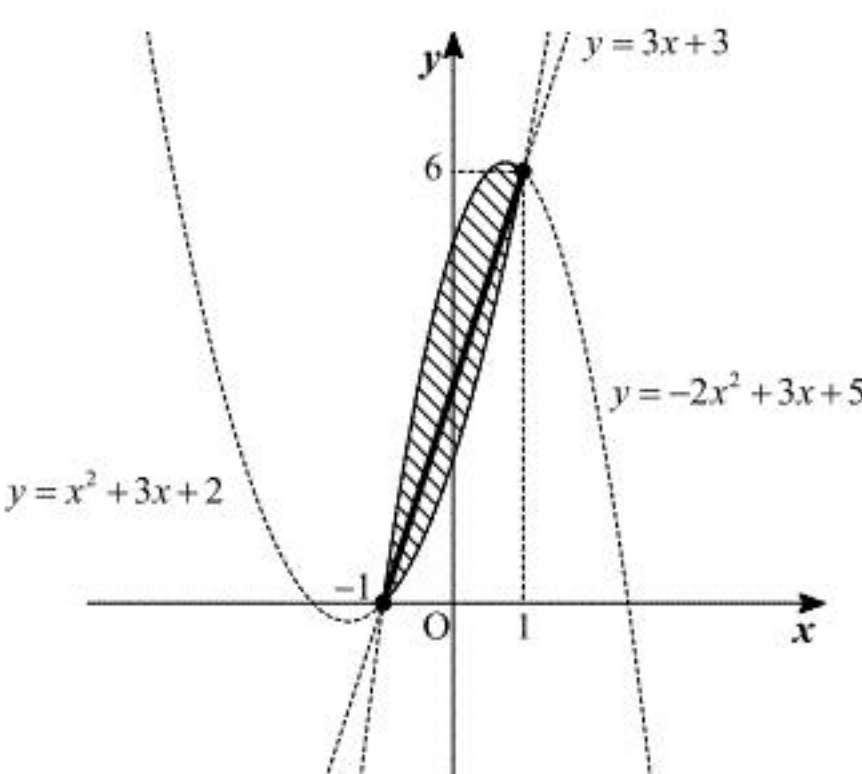
次に、 $y=x^2+3x+2$ と $y=-2x^2+3x+5$ のグラフの交点の x 座標は

$$\begin{aligned}
 x^2+3x+2 &= -2x^2+3x+5 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 &= 3 \\
 \Leftrightarrow x &= \pm 1
 \end{aligned}$$

より ± 1 であり、対応する y 座標が $(\pm 1)^2+3\cdot(\pm 1)+2=3\pm 3$ (複号同順)であるから、

$$\begin{aligned}
 y=x^2+3x+2 \text{ と } y=-2x^2+3x+5 \text{ のグラフの交点の座標は} \\
 (-1, 0), (1, 6)
 \end{aligned}$$

である。この2点はいずれも直線 $y=3x+3$ 上にある。以上のことに注意して条件 s と条件 p かつ条件 q を図示すると下図のようになる。ただし、斜線部が条件 p かつ r を表し境界を含む。また、太線部が条件 s を表し端点を含む。



よって s であることは、 p かつ q であるための十分条件であるが必要条件ではない。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	0	0	1	2	3	4	1	6	3	4
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
	2	0	3	4	6	0				

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{36}{7} + \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^1 \\
 &= \frac{36}{7} - \frac{36}{7} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 48 - 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \\
 &= 48 - 48 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \left\{ \frac{36}{7} + \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{n+1} \right\} - \left\{ \frac{36}{7} + \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n \right\} \\
 &= \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{-3}{4} - 1\right) \\
 &= -12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

より,

$$a_{n+1} = a_n - 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

であり,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \left\{ 48 - 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right\} - \left\{ 48 - 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \\
 &= -64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) \\
 &= 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

より,

$$b_{n+1} = b_n + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

である。

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}
 \ell_n &= \sqrt{(a_{n+1} - a_n)^2 + (b_{n+1} - b_n)^2} \\
 &= \sqrt{\left\{ -12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right\}^2 + \left\{ 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}^2} \\
 &= \sqrt{\{(-12)^2 + 16^2\} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} \\
 &= \sqrt{400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} \\
 &= 20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \\
 &= 20 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \\
 &= 60
 \end{aligned}$$

である。

【Ⅳ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ								
	－	1	7	－	1	2	1	2	0	6	7								
(2)	シ	ス	セ																
	2	1	5																
(3)	ソ	タ	チ																
	3	1	2																
(4)	ツ	テ																	
	5	3																	

【解説】

(1)

対数の真数は正であるから

$$\begin{cases} -2x+14>0 \\ x+1>0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow -1<x<7 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

であり、

$$2y^2>0 \\ \Leftrightarrow y^2>0 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

である。これらの条件の下で、

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}}(x+1) &= \frac{\log_2(x+1)}{\log_2\frac{1}{4}} \\ &= \frac{-1}{2}\log_2(x+1) \\ \log_4(2y^2) &= \frac{\log_2(2y^2)}{\log_2 4} \\ &= \frac{1}{2}\log_2(2y^2) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{(a)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(-2x+14) + \frac{1}{2}\log_2(x+1) &> \frac{1}{2}\log_2(2y^2) \\ \Leftrightarrow \log_2(-2x+14)(x+1) &> \log_2(2y^2) \end{aligned}$$

となる。底2は1より大きいから、これは

$$\begin{aligned} (-2x+14)(x+1) &> 2y^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &< -x^2+6x+7 \end{aligned}$$

となる。②と合わせて、

$$0<y^2<-x^2+6x+7$$

となる。

(2)

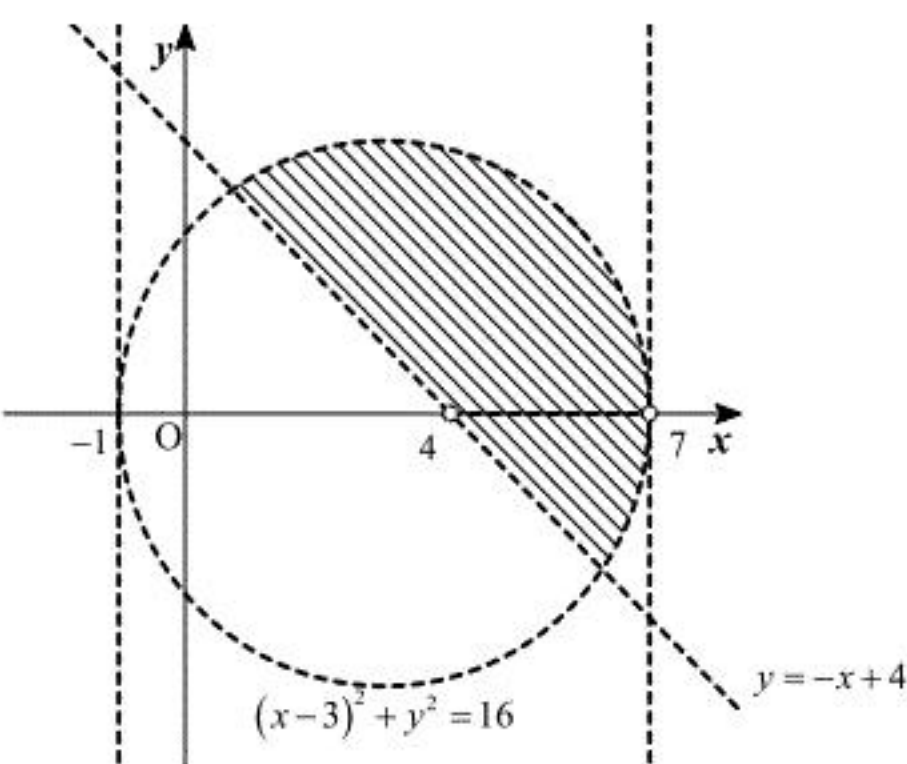
(b)の方程式を解くと

$$\begin{aligned} 4^y &> 2^{-2x+8} \\ \Leftrightarrow 2^{2y} &> 2^{-2x+8} \\ \Leftrightarrow 2y &> -2x+8 \ (\because 2>1) \\ \Leftrightarrow y &> -x+4 \end{aligned}$$

となる。①と(1)の結果を合わせて、求める領域Aは、

$$\begin{cases} -1<x<7 \\ 0<y^2<-x^2+6x+7 \\ y>-x+4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<7 \\ y\neq 0 \\ (x-3)^2+y^2<16 \\ y>-x+4 \end{cases}$$

の表す領域である。したがって、領域Aは下図の斜線部ようになる。ただし、x軸と境界は含まない。



よって直線 $y=-x+4$ と直線 $x=2$ の交点は $(2, 2)$ であり、円 $(x-3)^2+y^2=16$ と直線 $x=2$ の交点は

$$\begin{aligned} (2-3)^2+y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow y &= \pm 15 \end{aligned}$$

より $(2, \pm\sqrt{15})$ である。したがって、図より、 $(2, t)$ が領域Aに含まれるような t の範囲は $2<t<\sqrt{15}$ となる。

(3)

x座標が2の格子点の個数は、(2)より $2<t<\sqrt{15}$ を満たす整数 t の個数に等しく、これは3のみであるから1個である。また直線 $y=-x+4$ と直線 $x=0, 1, 3, 4, 5, 6$ の交点はそれぞれ

$$(0, 4), (1, 3), (3, 1), (4, 0), (5, -1), (6, -2)$$

であり、円 $(x-3)^2+y^2=16$ と直線 $x=0, 1, 3, 4, 5, 6$ の交点は

$$(0, \pm\sqrt{7}), (1, \pm2\sqrt{3}), (3, \pm4), (4, \pm\sqrt{15}), (5, \pm2\sqrt{3}), (6, \pm\sqrt{7})$$

であるから、 $x=2$ のときと同様に考えることで、 $x=0, 1, 3, 4, 5, 6$ 上にある格子点は

$$(3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, -1), (6, 1), (6, 2)$$

の11個である。以上より、領域Aに含まれる格子点の個数は12個である。

(4)

x座標の値を固定したとき、 $x+2y$ を最大にするのはy座標が一番大きい点である。よって、(3)で求めた12個の格子点のうち、 $x+2y$ を最大にする可能性があるのは

$$(2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 2)$$

である。これらに対して $x+2y$ の値を求めるとそれぞれ8, 9, 10, 11, 10となるから、 $x+2y$ の値を最大にする点の座標は $(5, 3)$ である。

〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	2	5	5
(2)	エ	オ	カ
	1	6	4
(3)	キ	ク	
	1	7	
(4)	ケ	コ	サ
	2	0	1
(5)	シ	ス	セ
	4	5	0
(6)	ソ		
	5		
(7)	タ		
	3		

〔解説〕

(1) 2進法で表したとき8桁となる最大の数は $11111111_{(2)}$ であるから、これを10進法で表すと

$$\begin{aligned} &2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 \\ &= \frac{2^8-1}{2-1} \\ &= 255 \end{aligned}$$

となる。

(2) $x=101001_{(2)}$ のとき、

$$\begin{aligned} l(x) &= 1010010_{(2)} \\ l(l(x)) &= 10100100_{(2)} \end{aligned}$$

となる。これを10進法で表すと

$$\begin{aligned} 2^2+2^5+2^7 &= 4+32+128 \\ &= 164 \end{aligned}$$

となる。

(3) まず35を2進法で表すと、 $35=2^5+2^1+2^0$ より $100011_{(2)}$ となる。よって、

$$r(x)=10001_{(2)}$$

であるから、これを10進法で表すと $2^4+2^0=17$ となる。

(4) $(a,b,c)=(1,1,0)$ のとき、 $a_1=1, b_1=1, c_1=0$ である。 b_1 が奇数であるから、

$$a_2=l(a_1), b_2=r(b_1), c_2=a_1+c_1$$

となる。よって

$$\begin{aligned} l(a_1) &= l(1) = l(1_{(2)}) = 10_{(2)} \\ r(b_1) &= r(1) = r(1_{(2)}) = 0_{(2)} \end{aligned}$$

となるから $a_2=2^1=2, b_2=0, c_2=1$ となる。

(5) すべての自然数*i*に対して $b_{i+1}=r(b_i)$ であるから、

$$\begin{aligned} b_1 &= b = 5 = 101_{(2)} \\ b_2 &= r(b_1) = r(101_{(2)}) = 10_{(2)} \\ b_3 &= r(b_2) = r(10_{(2)}) = 1_{(2)} \\ b_4 &= r(b_3) = r(1_{(2)}) = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $b_n=0$ となる整数*n*でもっとも小さいものは*n*=4である。また、 $b_2=2, b_3=1, b_4=0$ より b_1 が奇数、 b_2 が偶数、 b_3 が奇数であることを考慮して a_2, c_2, a_3, c_3, c_4 を順に計算すると、

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 = 10010_{(2)} \\ c_1 &= 0 \\ a_2 &= l(a_1) = l(10010_{(2)}) = 100100_{(2)} = 20 \\ c_2 &= a_1 + c_1 = 10 \\ a_3 &= l(a_2) = l(100100_{(2)}) = 1001000_{(2)} = 40 \\ c_3 &= c_2 = 10 \\ c_4 &= a_3 + c_3 = 50 \end{aligned}$$

となる。よって $c_4=50$ である。

(6) *N*の値を、*y*の値によって場合分けして求める。

[1] $y=0$ のとき

$$b_1=y=0 \text{ より、 } N=1 \text{ である。}$$

[2] $y \geq 1$ のとき

*y*を2進法で表したときに*d*桁であるとする。このとき、*y*を2進法で表すと

$$y=1\alpha_{d-1} \dots \alpha_2\alpha_{1(2)} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

の形である。すべての自然数*i*に対して $b_{i+1}=r(b_i)$ であるから、

$$\begin{aligned} b_1 &= y = 1\alpha_{d-1} \dots \alpha_2\alpha_{1(2)} \\ b_2 &= r(b_1) = 1\alpha_{d-1} \dots \alpha_2\alpha_{2(2)} \\ &\vdots \\ b_{d-1} &= r(b_{d-2}) = 1\alpha_{d-i(2)} \\ b_d &= r(b_{d-1}) = 1_{(2)} \\ b_{d+1} &= r(b_d) = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $N=d+1$ である。

以上[1], [2]より、 $0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$ の下での*N*の値は、

$$\begin{aligned} y=0 \text{ のとき } &N=1 \\ y=1 \text{ のとき } &N=2 \\ y=2, 3 \text{ のとき } &N=3 \\ y=4, 5, 6, 7 \text{ のとき } &N=4 \\ y=8, 9 \text{ のとき } &N=5 \end{aligned}$$

となる。したがって、*N*の最大値は5である。

(7) $(x,y)=(0,1)$ のとき、(6)の過程より

$$N=2, M=1$$

であるから、 $M \leq N$ が成り立つ。一方、 $(x,y)=(1,0)$ のときは、

$$N=1, M=2$$

であるから、 $M > N$ が成り立つ。よって $M \leq N$ となる*x, y*も、 $M > N$ となる*x, y*も存在する。

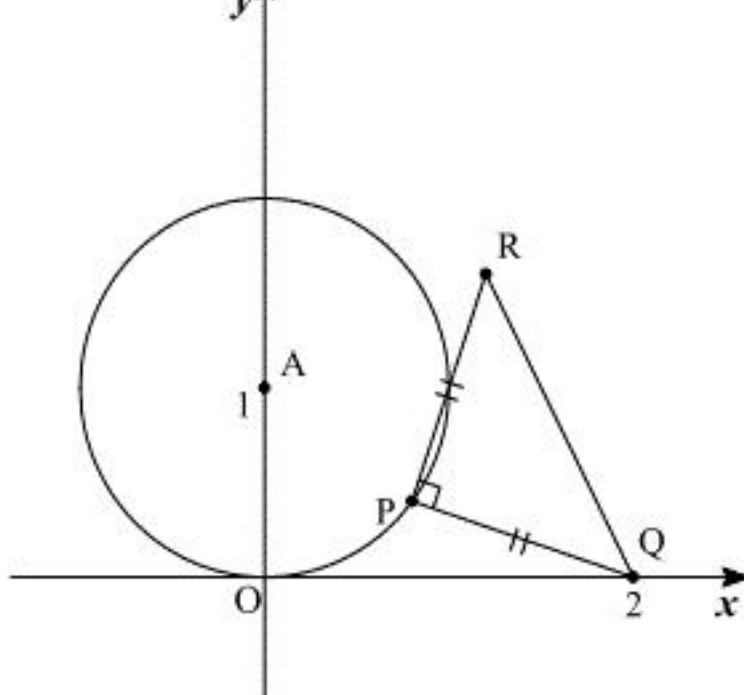
【VI】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	
	0	6	0	4	
(2)	オ	カ			
	1	3			
(3)	キ	ク			
	2	3			
(4)	ケ	コ	サ	シ	ス
	1	2	1	8	3

【解説】

- (1) 各図形を図示すると以下のようになる。



(a)より $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-p_1 \\ 0-p_2 \\ 0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1-p_1 \\ r_2-p_2 \\ 0-0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2-p_1)(r_1-p_1) - p_2(r_2-p_2) &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また(b)より $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}|$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= |\overrightarrow{PR}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{PR}|^2 \quad (\because |\overrightarrow{PQ}|, |\overrightarrow{PR}| > 0) \\ \Leftrightarrow (2-p_1)^2 + (0-p_2)^2 &= (r_1-p_1)^2 + (r_2-p_2)^2 \\ \Leftrightarrow (2-p_1)^2 + p_2^2 &= (r_1-p_1)^2 + (r_2-p_2)^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。点Pの座標が $(-1, 1, 0)$ のとき、①、②に $p_1 = -1, p_2 = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} \{2-(-1)\}\{r_1-(-1)\} - 1(r_2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(r_1+1) - (r_2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{1}{3}r_2 - \frac{4}{3} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \{2-(-1)\}^2 + 1^2 &= \{r_1-(-1)\}^2 + (r_2-1)^2 \\ \Leftrightarrow 9+1 &= (r_1+1)^2 + (r_2-1)^2 \\ \Leftrightarrow (r_1+1)^2 + (r_2-1)^2 &= 10 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。③を④に代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}r_2 - \frac{4}{3} + 1\right)^2 + (r_2-1)^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{3}(r_2-1)\right\}^2 + (r_2-1)^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (r_2-1)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow r_2-1 &= \pm 3 \\ \Leftrightarrow r_2 &= -2, 4 \end{aligned}$$

となる。 $r_2 > p_2$ より $r_2 = 4$ である。これを③に代入して、 $r_1 = 0$ となる。

- (2) Bの座標を $(b_1, b_2, 0)$ ($b_1 > 0$) とおくと題意より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &\perp \overrightarrow{AQ} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1-0 \\ b_2-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b_1 - (b_2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow b_2 &= 2b_1+1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{AQ}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{AQ}|^2 \quad (\because |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AQ}| > 0) \\ \Leftrightarrow (b_1-0)^2 + (b_2-1)^2 &= (2-0)^2 + (0-1)^2 \\ \Leftrightarrow b_1^2 + (b_2-1)^2 &= 5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。⑤を⑥に代入して

$$\begin{aligned} b_1^2 + (2b_1)^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow b_1^2 &= 1 \\ \therefore b_1 &= 1 \quad (\because b_1 > 0) \end{aligned}$$

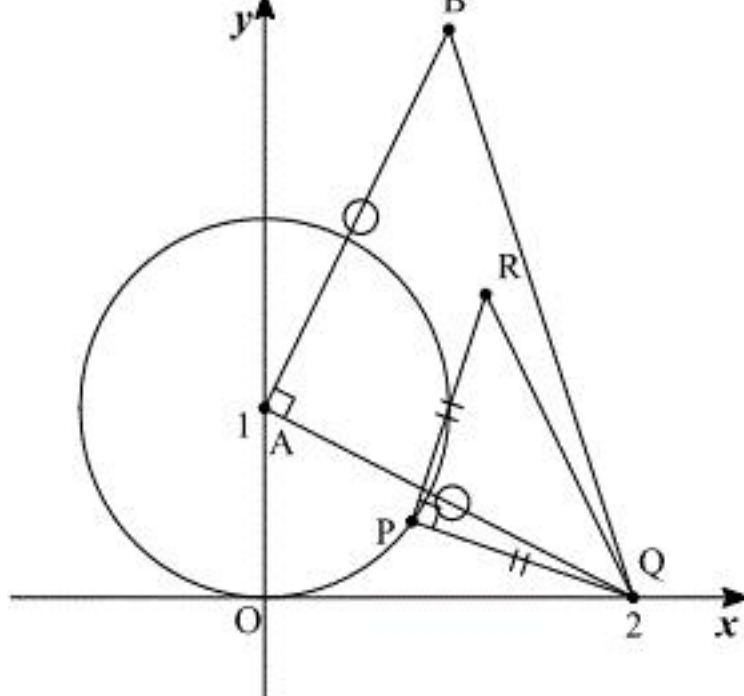
となる。これを⑤に代入すると $b_2 = 3$ が得られる。よって、点Bの座標は $(1, 3, 0)$ である。

- (3) $\triangle PQR$ と $\triangle AQB$ はともに直角二等辺三角形であり、相似である。よって

$$BQ:RQ = AQ:QP \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\angle BQA = \angle RQP \quad \dots \textcircled{8}$$

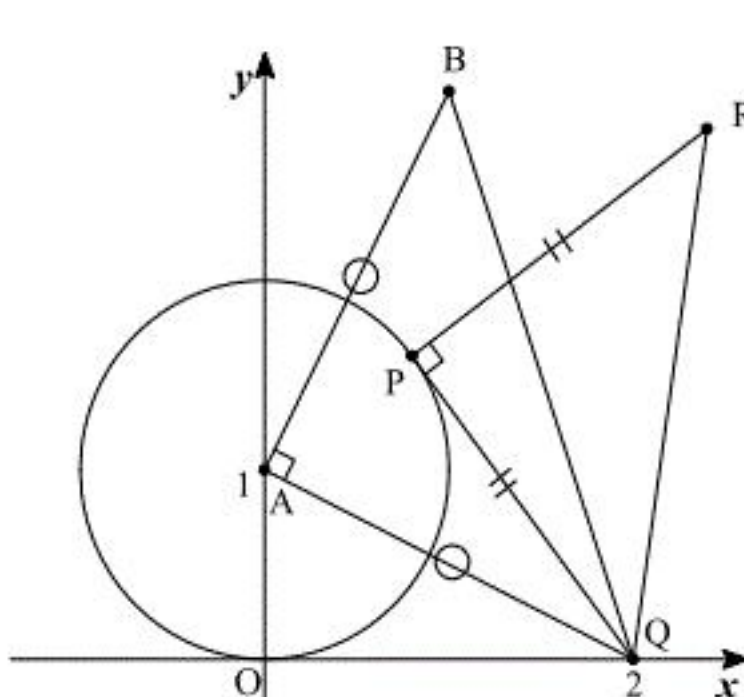
となる。また、点Pが直線AQの下側にあるとき、図は以下のようになる。



よってこのとき、⑧より、

$$\begin{aligned} \angle AQP &= \angle RQP - \angle RQA \\ &= \angle BQA - \angle RQA \\ &= \angle BQR \end{aligned}$$

となる。点Pが直線AQの上側にあるとき、図は以下のようになる。



よってこのとき、⑧より、

$$\begin{aligned} \angle AQP &= \angle RQA - \angle RQP \\ &= \angle RQA - \angle BQA \\ &= \angle BQR \end{aligned}$$

となる。以上より、点Pが直線AQ上にないとき、いずれの場合も

$$\angle AQP = \angle BQR \quad \dots \textcircled{9}$$

が成り立つ。よって⑦、⑨より2辺の比とその間の角が等しいから $\triangle APQ$ と $\triangle BRQ$ は相似で

あり、相似比は $AQ:BQ = 1:\sqrt{2}$ より $1:\sqrt{2}$ であるから $\sqrt{2}|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BR}|$ である。したがって、点P

が円Cを動くときの点Rの軌跡は、点Bを中心とし半径 $\sqrt{2}$ の xy 平面上の円である。

- (4) 題意より平面 α' の方程式は $z=s$ であるから、円 C' は点Aを中心とする半径1の球面Tと $z=s$ が交わってできる円である。球面Tの方程式は

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

であるからこれと平面 $\alpha': z=s$ が交わってできる円の α' 上での方程式は

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 + s^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 &= 1-s^2 \end{aligned}$$

である。したがって、円 C' の半径は $\sqrt{1-s^2}$ である。また、(3)と同様にして点P'が円 C' 上を動くときの点R'の軌跡は、半径が円 C' の半径の $\sqrt{2}$ 倍であるような α' 上の円である。よって点R'の軌跡によって囲まれる部分の面積 $S(s)$ は

$$S(s) = \left(\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}\right)^2 \pi = 2(1-s^2)\pi$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 S(s) ds &= \int_{-1}^1 2(1-s^2)\pi ds \\ &= \pi \left[2s - \frac{2}{3}s^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

である。