

〔I〕

(1)

与えられた漸化式を整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{S_n - 2n + 1}{a_n - 2} &= 2 \\ \Leftrightarrow S_n - 2n + 1 &= 2(a_n - 2) \\ \Leftrightarrow S_n &= 2a_n + 2n - 5\end{aligned}$$

となる。 $S_1 = a_1$ に注意して, $n=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}a_1 &= 2a_1 + 2 \cdot 1 - 5 \\ \therefore a_1 &= 3\end{aligned}$$

であり, $n=2$ を代入すると,

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= 2a_2 + 2 \cdot 2 - 5 \\ \Leftrightarrow a_2 &= a_1 + 1 \\ \therefore a_2 &= 4\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1 = 3, a_2 = 4$

(2)

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \{2a_{n+1} + 2(n+1) - 5\} - (2a_n + 2n - 5) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 2a_n - 2\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= 2(a_n - 2)\end{aligned}$$

であるから, 数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 1$, 公比 2 の等比数列である。したがって,

$$\begin{aligned}a_n - 2 &= 1 \cdot 2^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2^{n-1} + 2\end{aligned}$$

である。

(答) $a_{n+1} = 2a_n - 2, a_n = 2^{n-1} + 2$

(3)

数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$\begin{aligned}b_n &= a_{n+2} - a_n \\ &= \{2^{(n+2)-1} + 2\} - (2^{n-1} + 2) \\ &= 2^{n+1} - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(2^2 - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

である。ここで, a_n を 6 で割ったときの余りを r_n とすると, $r_1 = 3, r_2 = 4$ である。また, $n \geq 2$ のとき $b_n = a_{n+2} - a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ は 6 で割り切れるから,

$$r_{n+2} - r_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。したがって,

$$r_n = \begin{cases} r_2 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ r_3 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

である。ここで, $a_3 = 2^{3-1} + 2 = 6$ より $r_3 = 0$ であるから, a_n を 6 で割ったときの余り r_n は,

$$r_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 余り $\begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき}) \end{cases}$

〔Ⅱ〕

(1)

関数 $f(x) = ax^2 + (4-4a)x$ について、両辺を x で微分すると、

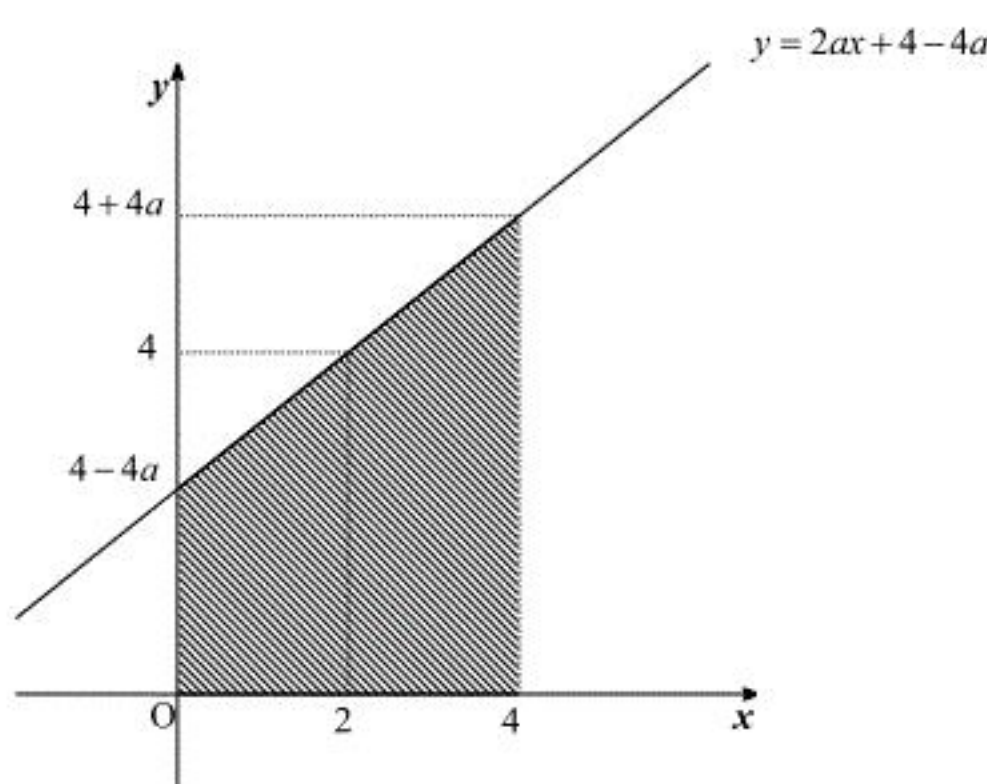
$$f'(x) = 2ax + 4 - 4a = a(2x - 4) + 4$$

となる。 $f'(2) = 4$ より、 $x = 2$ のとき $f'(x)$ の値は a によらないから、 $y = f'(x)$ のグラフは a の値によらず点 $(2, 4)$ を通る。

(答) $(2, 4)$

(2)

$y = f'(x)$ のグラフを図示すると以下のようになる。



上図より、 $0 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2a \leq 2$ のとき、 $0 \leq x \leq 4$ において $f'(x) \geq 0$ であることがわかる。 S は上図の斜線部分の面積であるから、

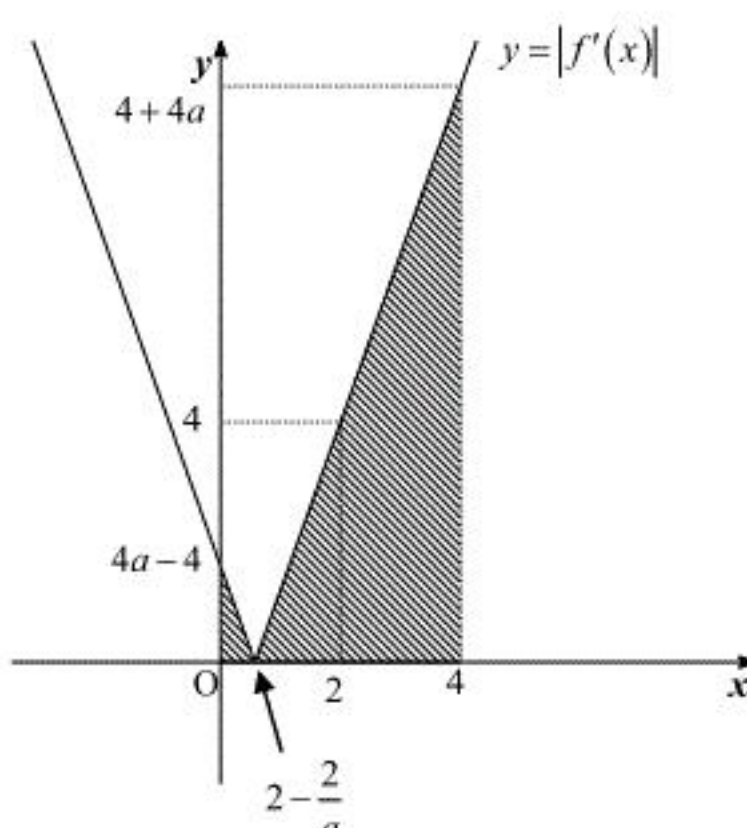
$$S = \frac{1}{2} \cdot \{(4-4a) + (4+4a)\} \cdot 4 = 16$$

である。

(答) $S = 16$

(3)

$1 < a$ のとき $4-4a < 0$ であり、 $y = |f'(x)|$ のグラフを図示すると以下のようになる。



$y = |f'(x)|$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 2ax + 4 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 - \frac{2}{a} \end{aligned}$$

と求まる。(2)と同様に $y = |f'(x)|$ と x 軸で囲まれる部分の面積を考えて、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (4a-4) \cdot \left(2 - \frac{2}{a}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4+4a) \cdot \left\{4 - \left(2 - \frac{2}{a}\right)\right\} \\ &= 4(a-1) \left(1 - \frac{1}{a}\right) + 4(a+1) \left(1 + \frac{1}{a}\right) \\ &= 4 \left(a - 2 + \frac{1}{a}\right) + 4 \left(a + 2 + \frac{1}{a}\right) \\ &= 8 \left(a + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

である。

(答) $S = 8 \left(a + \frac{1}{a}\right)$

(4)

(2), (3)の結果より、

$$S = \begin{cases} 16 & (0 \leq a \leq 1) \\ 8 \left(a + \frac{1}{a}\right) & (1 < a) \end{cases}$$

となる。 $1 < a$ のとき $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より、

$$S = 8 \left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 16$$

となる。等号成立は $a = \frac{1}{a}$, すなわち $a = 1$ のときである。したがって、 $1 < a$ において

$S > 16$ が成り立つから、 S のとりうる値の最小値は 16 である。

(答) 16

〔Ⅲ〕

(1)

以降、A の座る位置を内側、外側それぞれについてある椅子に固定することで、B～G の並び方のみを考え、円卓を中心とした回転による並び方の重なりを考慮しなくてよい。まず、B～G の6 人が内側の円周上にある7 脚の椅子に座るときの並び方は、

$${}_7P_6 = 5040 \text{ (通り)}$$

である。このうち A と B が隣り合うのは、B が A の左隣か右隣に座り、C～G の5 人が残りの6 脚の椅子に座るときであるから、その並び方は、

$$2 \cdot {}_6P_5 = 1440 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める並び方は、

$$5040 - 1440 = 3600 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 3600 通り

(2)

B の座る位置は7 通りあり、C～G の5 人が内側の円周上にある8 脚の椅子に座るから、求める並び方は、

$$7 \cdot {}_8P_5 = 47040 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 47040 通り

(3)

A の座る位置は、内側の椅子か外側の椅子に座る2 通りあり、A の座る椅子に対して B の座る椅子はただ1 つに定まる。C～G の5 人は残りの14 脚の椅子に座るから、求める並び方は、

$$2 \cdot {}_{14}P_5 = 480480 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 480480 通り