

〔Ⅰ〕

(1)

$f(x)=x^2-(t+3)x+at-b+2$ について、 $a=2, b=-1$ のとき、 $f(x)=x^2-(t+3)x+2t+3$ である。よって、このとき 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D_1 とおくと、求める条件は

$$\begin{aligned} D_1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)^2-4(2t+3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t^2-2t-3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-3) &\geq 0 \\ \therefore t \leq -1, 3 \leq t \end{aligned}$$

である。

(答) $t \leq -1, 3 \leq t$

(2)

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D_2 とおくと、方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつための条件は、(1)と同様に考えて

$$\begin{aligned} D_2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)^2-4(at-b+2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t^2-2(2a-3)t+(4b+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

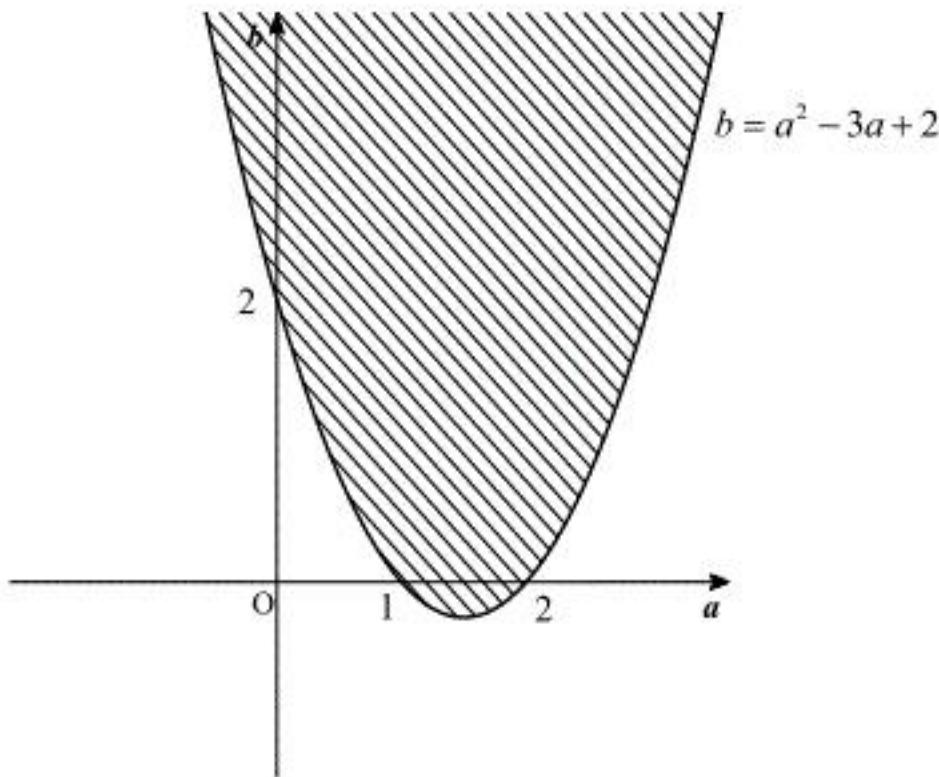
となる。これが任意の実数 t に対して成立するためには、 t についての 2 次方程式

$$t^2-2(2a-3)t+(4b+1)=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が実数解を持たないか、または重解を持てばよい。すなわち、 t についての 2 次方程式①の判別式を D_3 とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D_3}{4} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2a-3)^2-(4b+1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow b &\geq a^2-3a+2 \\ \Leftrightarrow b &\geq \left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となり、これを図示すると、下図の斜線部のようになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

〔Ⅱ〕

(1)

すべての球を区別して考える。このとき、取り出し方の総数は $8!$ 通りであり、同様に確からしい。ここで、赤球が連続する場合を考える。赤球2つを一つの塊と考えると、赤球の塊と白球3個と黒球3個を取り出すと考えると、赤球の塊の中での赤球の並べ方が2通り、赤球の塊と白球3個と黒球3個の取り出し方が $7!$ 通りであるので、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 7!}{8!} = \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

球を取り出した順に並べると考える。ここで、条件を満たす並べ方は、先に白球以外を並べて、後から白球を赤球と黒球の間または端に重複せず1つずつ置くことですべて表現することができる。ここで、赤球と黒球の並べ方は、球をすべて区別して考えるので $5!$ 通りである。続いて、赤球と黒球の間または端は6箇所あり、この中で白球を置く3箇所を選べばよい。その選び方は ${}_6P_3$ 通りとなる。よって、求める確率は

$$\frac{5! \cdot {}_6P_3}{8!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{14}$$

となる。

(答) $\frac{5}{14}$

〔Ⅲ〕

(1)

$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、三角関数の合成により $f(\theta)$ は

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2}{3}\pi$ であるから、 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ は

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } 1$$

をとる。したがって、 $f(\theta)$ は

$$\theta = 0 \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0 \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(2)

三角関数の合成により、

$$f(\theta) = \sqrt{t^2 + 1} \sin(\theta + \alpha)$$

と変形できる。ただし、 $\sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ である。ここで $\cos \alpha > 0$ であるから

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。また、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$ である。以下、 α の値の範囲によって場合分けする。

[1] $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき

このとき、 $\sin \alpha \geq 0$ より $t \geq 0$ である。 $\sin(\theta + \alpha)$ は $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき、最大値1をとる。したがって、 $f(\theta)$ の最大値が5であるとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + 1} \cdot 1 &= 5 \\ \therefore t &= 2\sqrt{6} \quad (\because t \geq 0) \end{aligned}$$

であり、

$$\sin \theta_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

となる。

[2] $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ のとき

このとき、 $\sin \alpha < 0$ より $t < 0$ である。 $\sin(\theta + \alpha)$ は $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

をとる。したがって、 $f(\theta)$ の最大値は

$$\sqrt{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} = 1$$

となるから最大値が5となることはない。よって、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ は不適である。

以上[1],[2]より、 $f(\theta)$ の最大値が5となるとき、 $t = 2\sqrt{6}$ であり、 $\sin \theta_0 = \frac{1}{5}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = 2\sqrt{6}, \sin \theta_0 = \frac{1}{5}$$