

情報科学部A方式

2 限 数 学 (90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 問題文は4ページから28ページまでです。
4. マークシート解答方法については以下の解答上の注意を読みなさい。
5. 問題冊子のページを切り離さないこと。

解答上の注意

1. 問題文中のア、イ、ウ、… のそれぞれには、特に指示がないかぎり、
－ (マイナスの符号)、0～9の数が1つずつ入ります。
当てはまるものを選び、マークシートの解答用紙の対応する欄に
マークして解答しなさい。
ただし、分数の形で解答が求められているときには、
符号は分子に付け、分母・分子を可能な限り約分して解答しなさい。
また、根号を含む形で解答が求められているときには、
根号の中に現れる自然数は最小になるように解答しなさい。

例	解答欄	解答	記入のしかた
1.	$\frac{\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$	$-\frac{\sqrt{18}}{22}$	$\frac{\boxed{-3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}\boxed{2}}$

2. マークシート記入上の注意については、問題冊子の裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

〔 I 〕

- (1) 次の、 x の関数が周期関数ならば、その関数の周期を解答群から選べ。ただし、正のもっとも小さい周期を選ぶこと。例えば、関数 $\sin x$ の正のもっとも小さい周期は 2π である。関数が周期関数でない場合は 0 を選べ。同じものを何回選んでもよい。

$1 + \tan x$ の周期は **ア** である。

$x + \sin x$ の周期は **イ** である。

$|\sin x|$ の周期は **ウ** である。

$\sin x \cos x$ の周期は **エ** である。

$\frac{1}{\sin x}$ の周期は **オ** である。

$\sin x + \cos 2x$ の周期は **カ** である。

ア ～ **カ** の解答群

- | | | | |
|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $\frac{1}{4}\pi$ | ④ $\frac{1}{2}$ |
| ⑤ $\frac{1}{2}\pi$ | ⑥ 1 | ⑦ π | ⑧ 2 |
| ⑨ 2π | ⑩ 4 | ⑪ 4π | |

(〔 I 〕の問題は続く)

(計 算 用 紙)

(2) 以下の空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ は、すべての実数 x について $f(-x) = \boxed{\text{キ}}$ を満たし、

$\int_{-r}^r f(x) dx = \boxed{\text{ク}}$ である。

次に、 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x^2 e^{-x^2} dx$ を計算する。ただし、以下の (a)、(b) は前提知識として与えられているものとする。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdots (a) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \cdots (b)$$

まず、部分積分を使って $\int_{-r}^r x^2 e^{-x^2} dx$ を計算する。

$$x^2 e^{-x^2} = \frac{-x}{2} \times (-2x) e^{-x^2} = \frac{-x}{2} \frac{d}{dx} \left(\boxed{\text{ケ}} \right)$$

と考えて、以下のように変形するとよい。

$$\int_{-r}^r x^2 e^{-x^2} dx = \left[\boxed{\text{コ}} \right]_{-r}^r - \int_{-r}^r \boxed{\text{サ}} dx$$

$x > 1$ においては、 $e^x < e^{x^2}$ だから、

$$0 < \frac{x}{e^{x^2}} < \frac{x}{e^x}$$

であり、(b)を用いると、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = \boxed{\text{シ}}$ となる。

これらの結果および (a) を用いると、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r x^2 e^{-x^2} dx = \boxed{\text{ス}}$$

である。

キ の解答群

- | | | |
|---------------------|-------------|---------------------|
| ① $f(x)$ | ④ $f(x+1)$ | ⑦ $f(x-1)$ |
| ③ $f(2x)$ | ⑤ $-f(x)$ | ⑧ $-f(x+1)$ |
| ⑥ $-f(x-1)$ | ⑨ $-f(-2x)$ | ② $\frac{1}{f(-x)}$ |
| ⑧ $-\frac{1}{f(x)}$ | | |

ク ・ **シ** ・ **ス** の解答群

- | | | | |
|--------------------------|------------------|--------------------------|----------------|
| ① 0 | ④ 1 | ⑦ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ | ② $\sqrt{\pi}$ |
| ③ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ | ⑤ $\sqrt{\pi}+1$ | ⑧ e^{-r} | ① e^{-r^2} |
| ⑥ ∞ | ⑨ $-\infty$ | | |

ケ ～ **サ** の解答群

- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------|--------------------------|
| ① $\frac{1}{2}e^{-x^2}$ | ④ $\frac{-1}{2}e^{-x^2}$ | ⑦ $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ | ② xe^{-x^2} |
| ③ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ | ⑤ e^{-x^2} | ⑧ $\frac{x}{2}e^{-x^2}$ | ① $\frac{-x}{2}e^{-x^2}$ |
| ⑥ $\frac{x^2}{2}e^{-x^2}$ | ⑨ $\frac{-x^2}{2}e^{-x^2}$ | | |

(〔I〕の問題は続く)

(3) $x = 1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ のとき,

$x^7 - 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ の値は,

$\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(計 算 用 紙)

〔Ⅱ〕

- (1) C を複素数全体の集合とし、次のような C の部分集合 S, T, R を考える。

$$S = \{z \mid z \text{ は } z^2 = 1 \text{ を満たす複素数}\}$$

$$T = \{z \mid z \text{ は } z^3 = 1 \text{ を満たす複素数}\}$$

$$R = \{z \mid z \text{ は } z^6 = 1 \text{ を満たす複素数}\}$$

ここでは、全体集合を C とし、その部分集合 A に対する補集合を $\bar{A}$ と表す。

また、空集合を $\emptyset$ と表す。

以下のそれぞれが真の命題となるように、空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

$$-1 \quad \boxed{\text{ア}} S, S \quad \boxed{\text{イ}} T = \{1\}, S \quad \boxed{\text{ウ}} \bar{R} = \emptyset$$

以下の空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

命題「 $S \cup T = R$ 」は $\boxed{\text{エ}}$ である。

命題「 $\bar{S} \cap T \subset R$ 」は $\boxed{\text{オ}}$ である。

命題「 $(\bar{S} \cap \bar{T}) \cap R = \emptyset$ 」は $\boxed{\text{カ}}$ である。

ア ～ **ウ** の解答群

② $\in$	① $\ni$	② $\subset$
③ $\supset$	④ $\cap$	⑤ $\cup$

エ ～ **カ** の解答群

② 偽	① 真
-----	-----

(〔Ⅱ〕の問題は続く)

- (2) 実数 x, y に関する条件について、以下の空欄に適切なものを解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

条件 p を

$$y \geq x^2 + 3x + 2$$

とし、条件 q を

$$y \leq -x^2 + 9$$

とする。 p であることは、 q であるための キ。

条件 r を

$$y \leq -2x^2 + 3x + 5$$

とする。 q であることは、 r であるための ク。

条件 s を

$$y = 3x + 3 \text{ かつ } -1 \leq x \leq 1$$

とする。 s であることは、 p かつ r であるための ケ。

キ ～ ケ の解答群

- ① 必要条件でも十分条件でもない
 - ① 必要条件であるが十分条件ではない
 - ② 十分条件であるが必要条件ではない
 - ③ 必要十分条件である

(計 算 用 紙)

〔Ⅲ〕

一般項が,

$$a_n = \frac{36}{7} + \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4} \right)^n$$

で表される数列 $\{a_n\}$, および, 一般項が,

$$b_n = 48 - 64 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

で表される数列 $\{b_n\}$ に関して, 以下の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \boxed{\text{ア}}$, $b_1 = \boxed{\text{イ}}$ である。 n を自然数とすると,

$$a_{n+1} = a_n - \boxed{\text{ウエ}} \cdot \left(-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{キク}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)^n$$

である。

- (2) x 座標が a_n , y 座標が b_n である点を $P_n(a_n, b_n)$ とする。 P_n と P_{n+1} の距離を ℓ_n とするとき,

$$\ell_n = \boxed{\text{サシ}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)^n$$

である。このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = \boxed{\text{ソタ}}$$

である。

(計 算 用 紙)

〔Ⅳ〕

次の連立不等式の表す xy 平面上の領域を A とする。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2(-2x + 14) - \log_{\frac{1}{4}}(x + 1) > \log_4(2y^2) \cdots (a) \\ 4^y > 2^{-2x+8} \cdots (b) \end{cases}$$

(1) (a)について考える。

対数の真数は正の数だから、 $\boxed{\text{アイ}} < x < \boxed{\text{ウ}}$ である。

底の変換公式から、

$$\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}} \log_2(x + 1)$$

$$\log_4(2y^2) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \log_2(2y^2)$$

である。したがって、

$$\boxed{\text{ケ}} < y^2 < -x^2 + \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}}$$

である。

((Ⅳ)の問題は続く)

(計 算 用 紙)

(2) t を実数とする。

点 $(2, t)$ が A に含まれるのは, $\boxed{\text{シ}} < t < \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ のときである。

(3) 座標平面上の点 (x, y) のうち, x, y がともに整数である点を格子点という。

u を整数とすると, 格子点 $(2, u)$ が A に含まれるのは, $u = \boxed{\text{ソ}}$ のときである。領域 A に含まれる格子点の個数は, $\boxed{\text{タチ}}$ 個である。

(4) 領域 A に含まれる格子点のうち, $x + 2y$ の値を最大にする点の座標は, $(\boxed{\text{ツ}}, \boxed{\text{テ}})$ である。

(計 算 用 紙)

[V]

コンピュータを使うと足し算や掛け算などの計算ができる。しかし、コンピュータの内部では、人間とは違う計算方法を用いている。コンピュータの内部では、数は2進法で表される。

以下では、2進法で表した数は、その数の右下に $_{(2)}$ と記す。たとえば、10が2進法で表した数のときには $10_{(2)}$ と記す。 $10_{(2)}$ は、10進法で表すと2であるから $10_{(2)} = 2$ である。

- (1) 2進法で表したとき8桁となる最大の整数を、10進法で表すと **アイウ** である。

$l(x)$ と $r(x)$ を以下のように定める。

- 負でない整数 x を2進法で表し、その数字の並びの右側に0をひとつ付け加えてできる数を $l(x)$ で表す。たとえば、 $x = 1101_{(2)}$ のとき、 $l(x) = 11010_{(2)}$ である。
- 負でない整数 x を2進法で表し、その数字の並びの右はしにある数字を取り除いてできる数を $r(x)$ で表す。たとえば $x = 1101_{(2)}$ のとき、 $r(x) = 110_{(2)}$ である。ただし、 $x = 0_{(2)}$ または $x = 1_{(2)}$ のときは、 $r(x) = 0_{(2)}$ とする。

- (2) $x = 101001_{(2)}$ のとき、 $l(l(x))$ を10進法で表すと **エオカ** である。

- (3) $x = 35$ のとき、 $r(x)$ を10進法で表すと **キク** である。

([V]の問題は続く)

(計 算 用 紙)

負でない整数 a, b, c の組 (a, b, c) が与えられたとき、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を次の規則で定める。

(イ) $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$

(ロ) $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, \dots)$ が定められているとき、 b_i が偶数ならば、

$$a_{i+1} = l(a_i), b_{i+1} = r(b_i), c_{i+1} = c_i$$

とし、 b_i が奇数ならば、

$$a_{i+1} = l(a_i), b_{i+1} = r(b_i), c_{i+1} = a_i + c_i$$

とする。

(4) $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ に対して、(イ)、(ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ とする。

$$a_2 = \boxed{\text{ケ}}, b_2 = \boxed{\text{コ}}, c_2 = \boxed{\text{サ}}$$

である。

(5) $(a, b, c) = (10, 5, 0)$ に対して、(イ)、(ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ とする。 $b_n = 0$ となる整数 n でもっとも小さいものは、 $n = \boxed{\text{シ}}$ である。

このとき、 $c_n = \boxed{\text{スセ}}$ である。

(〔V〕の問題は続く)

(6) x, y を負でない整数とする。

$(a, b, c) = (x, y, 0)$ に対して、(イ), (ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とするとき、 $b_n = 0$ となる整数 n のうちで、もっとも小さいものを N とする。

整数 x, y が、 $0 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$ を満たすときの、 N の最大値は ソ である。

(7) x, y を負でない整数とする。

$(a, b, c) = (x, y, 0)$ に対して、(イ), (ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とするとき、 $b_n = 0$ となる整数 n のうちで、もっとも小さいものを N とする。

また、 $(a, b, c) = (y, x, 0)$ に対して、(イ), (ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とするとき、 $b_m = 0$ となる整数 m のうちで、もっとも小さいものを M とする。このとき、タ。

ただし、タ については、適切なものを解答群から選べ。

タ の解答群

- ① すべての x, y に対して、 $M = N$ である
 - ② すべての x, y に対して、 $M < N$ である
 - ③ すべての x, y に対して、 $M > N$ である
 - ④ $M \leq N$ となる x, y も、 $M > N$ となる x, y も存在する

[VI]

O を原点とする座標空間に、点 $A(0, 1, 0)$, $Q(2, 0, 0)$ がある。 xy 平面を α とする。 α 上の、A を中心とする半径 1 の円を C とする。点 P は C の上にあるとし、P の座標を $P(p_1, p_2, 0)$ とする。

α 上の点 $R(r_1, r_2, 0)$ は、

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \quad \cdots (a)$$

および

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \quad \cdots (b)$$

を満たすとする。ただし $r_2 > p_2$ とする。

(1) (a)より $\boxed{\text{ア}}$ となる。また、(b)より $\boxed{\text{イ}}$ となる。

P の座標が $P(-1, 1, 0)$ のとき、R の座標は、 $R(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}, 0)$ である。

ただし、 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ については、適切なものを解答群から選べ。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の解答群

- ① $(2 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 0$
- ① $(1 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 0$
- ② $(2 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 1$
- ③ $(1 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 1$
- ④ $p_1^2 + p_2^2 = r_1^2 + r_2^2$
- ⑤ $p_1^2 + p_2^2 + 1 = r_1^2 + r_2^2$
- ⑥ $(2 - p_1)^2 + p_2^2 = (r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2$
- ⑦ $(1 - p_1)^2 + p_2^2 = (r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2$

([VI]の問題は続く)

(計 算 用 紙)

(2) xy 平面上の点 B は, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AQ}$ および $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AQ}|$ を満たすとする。 B の座標は, $B(\text{オ}, \text{カ}, 0)$ である。ただし $\text{オ} > 0$ とする。

(3) $P(p_1, p_2, 0)$ を C 上の点とする。 $R(r_1, r_2, 0)$ を 24 ページの(a)および(b)を満たす点とする。ただし $r_2 > p_2$ とする。三角形 PQR と三角形 AQB は相似である。

P が直線 AQ 上にあるとき, R は直線 BQ 上にある。また, P が直線 AQ 上にないとき, キ から,

$$\text{ク} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BR}| \text{ および } \angle PAQ = \angle RBQ$$

が成り立つ。

したがって, 点 P が C 上を動くときの点 R の軌跡は, 点 B を中心とし半径 ク の xy 平面上の円である。

ただし, キ , ク については, 適切なものを解答群から選べ。

キ の解答群

- ① 三角形 APQ は直角三角形である
- ① 三角形 BRQ は直角三角形である
- ② 三角形 APQ と三角形 BRQ は相似である
- ③ 三角形 APQ の面積と三角形 BRQ の面積は等しい

ク の解答群

- | | | | |
|-----------------|------------------------|-----------------|--------------|
| ① $\frac{1}{2}$ | ① $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ② $\frac{1}{3}$ | ③ $\sqrt{2}$ |
| ④ $\sqrt{3}$ | ⑤ 2 | ⑥ 3 | ⑦ π |
| ⑧ $\sqrt{5}$ | ⑨ 2π | | |

(〔VI〕の問題は続く)

(計 算 用 紙)

(4) s を $-1 < s < 1$ を満たす実数とする。

点 $Q'(2, 0, s)$ を通り、 z 軸に垂直な平面を α' とする。点 $A(0, 1, 0)$ を中心とする半径 1 の球面と、 α' が交わってできる円を C' とする。 C' の半径は、

$$\sqrt{\boxed{\text{ケ}} - s^2} \text{ である。}$$

点 P' は C' 上にあるとし、 P' の座標を $P'(p'_1, p'_2, s)$ とする。 α' 上の点 $R'(r'_1, r'_2, s)$ は、

$$\overrightarrow{P'Q'} \perp \overrightarrow{P'R'} \text{ および } |\overrightarrow{P'Q'}| = |\overrightarrow{P'R'}|$$

を満たすとする。ただし、 $r'_2 > p'_2$ とする。

P' が C' 上を動くときの、 R' の軌跡は円であり、軌跡が囲む α' の部分の面積を $S(s)$ とすると、

$$S(s) = \boxed{\text{コ}} \left(\boxed{\text{サ}} - s^2 \right) \pi$$

である。

$$\int_{-1}^1 S(s) ds = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi$$

である。

(以 上)

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

記入上の注意

マークシート解答は、鉛筆でマークしたものを機械が直接読みとって採点する。したがって解答はHBの黒鉛筆でマークすること(万年筆、ボールペン、シャープペンシルなどを使用しないこと)。

① 記入例 アの解答を3にマークする場合。

正しいマークの例

ア	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

悪いマークの例

ア	①	②		④	⑤	枠外にはみ出してマークしないこと。
ア	①	②		④	⑤	枠全体をマークするようにしなさい。
ア	①	②	③	④	⑤	○でかこんでマークしないこと。
ア	①	②	✕	④	⑤	✕を書いてマークしないこと。

② 解答を訂正する場合は、消しゴムでよく消してから、あらためてマークすること。

③ 解答用紙をよごしたり、折りまげたりしないこと。

④ 問題に指定された数よりも多くマークしないこと。