

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	3	4	1	4	3	4	1	4	-	1	2
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ						
	-	5	4	-	1						
(3)	チ	ツ									
	7	0									
(4)	テ	ト									
	d	a									

【解説】

(1)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ただし $r>0$, $0\leq\theta<2\pi$) とおくと、

$$8z^3=i$$

$$\Leftrightarrow 8r^3\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right)=\cos \frac{1}{2}\pi+i\sin \frac{1}{2}\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8r^3=1 \\ 3\theta=\frac{1}{2}\pi+2n\pi\left(n=0,1,2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=\frac{1}{2} \\ \theta=\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

となるので、求める解は

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(\cos \frac{1}{6}\pi+i\sin \frac{1}{6}\pi\right), \frac{1}{2}\left(\cos \frac{5}{6}\pi+i\sin \frac{5}{6}\pi\right), \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{2}\pi+i\sin \frac{3}{2}\pi\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i, -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i, \frac{-1}{2}i \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\cos^2x+\sin x+a=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin^2x\right)+\sin x+a=0$$

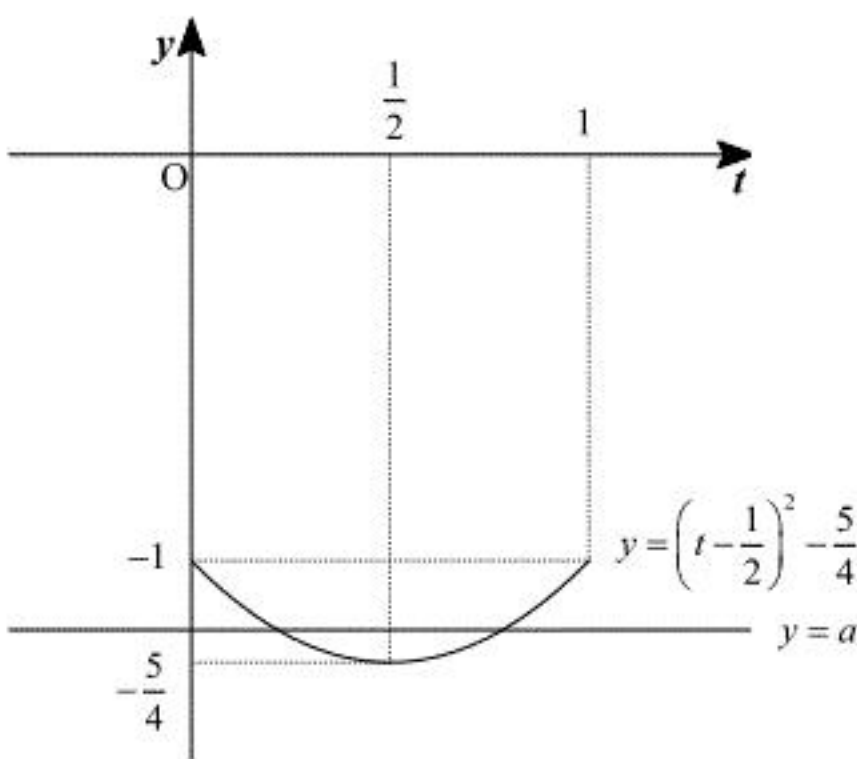
$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=a \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。このとき、 $t=\sin x$ とおくと、 x の方程式①が $0\leq x\leq\pi$ において少なくとも1つの実数解を持つことと、 t の方程式

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=a$$

が $0\leq t\leq 1$ において少なくとも1つの実数解を持つことは同値である。ここで、

$y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ のグラフを $0\leq t\leq 1$ の範囲で図示すると下図のようになる。



したがって、 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ と $y=a$ が $0\leq t\leq 1$ において少なくとも1つ共有点を持つ a の範囲は、

$$-\frac{5}{4}\leq a\leq -1$$

となるから、これが求める a の範囲である。

(3)

$$\begin{aligned} \log_{10}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100}\right\} &= \log_{10}\frac{2^{101}}{10^{100}} \\ &= 101\log_{10}2-100 \\ &= 101\cdot 0.3010-100 \\ &= -69.599 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} -70 &< \log_{10}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100}\right\} < -69 \\ \therefore 10^{-70} &< 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100} < 10^{-69} \end{aligned}$$

となる。よって、 $2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$ を小数で表したとき、小数第70位に初めて0でない数字が現れる。

(4)

n を正の整数とすると、 n が3の倍数ならば、 n は整数 k を用いて $n=3k$ と表される。したがって、

$$n^2=\left(3k\right)^2=3\cdot 3k^2$$

であるから、 n^2 も3の倍数となる。次に、 n が3の倍数でないならば、 n は同様に k を用いて $n=3k\pm 1$ と表される。よって、

$$n^2=\left(3k\pm 1\right)^2=3\left(3k^2\pm 2k\right)+1$$

であるから、 n^2 も3の倍数でない。したがって、その対偶を考えると、 n^2 が3の倍数ならば、 n も3の倍数となる。よって、 n^2 が3の倍数であることは、 n が3の倍数であることの必要十分条件である。次に、 x を実数とすると、

$$|x-3|=5x$$

$$\Leftrightarrow |x-3|^2=\left(5x\right)^2 \text{ かつ } x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)\left(4x+3\right)=0 \text{ かつ } x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

となるから、 $|x-3|=5x$ は $x=-\frac{3}{4}$ であることの必要条件でも十分条件でもない。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
9	3	3	－	6	2	－	1	9	4	3	－	7	8	3	4	0	1	8

〔解説〕

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x}{x-3} \\ &= \frac{9}{x-3} + 3 \end{aligned}$$

より、 C は曲線 $y = \frac{9}{x}$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。また、 C と ℓ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-3} &= -x-4 \\ \Leftrightarrow 3x &= (-x-4)(x-3) \text{ かつ } x \neq 3 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+6) &= 0 \text{ かつ } x \neq 3 \\ \Leftrightarrow x &= -6, 2 \end{aligned}$$

である。次に、曲線 C 上の点 $(-6, f(-6))$ における接線の方程式は、

$$f'(x) = -\frac{9}{(x-3)^2}$$

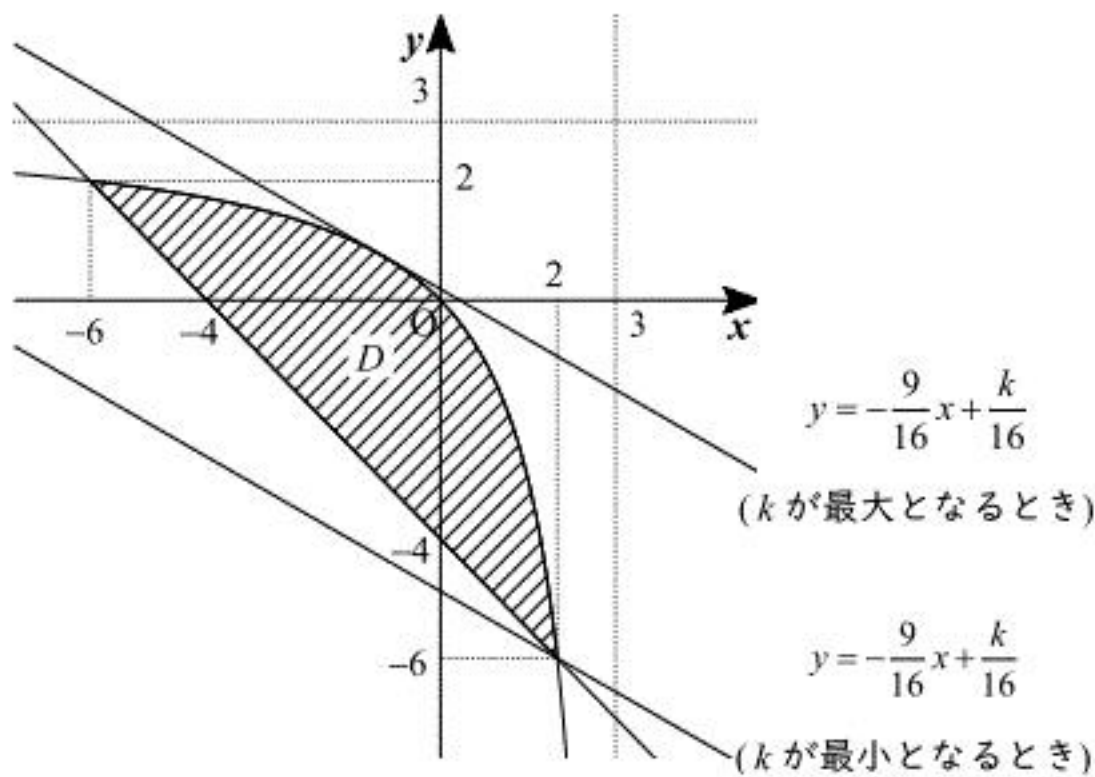
より、

$$\begin{aligned} y &= f'(-6)\{x - (-6)\} + f(-6) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{9}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。さらに、実数 k を用いて

$$\begin{aligned} 9x + 16y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{9}{16}x + \frac{k}{16} \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

とおく。与えられた連立不等式が表す領域を D としたとき、直線①と領域 D が共有点を持つような k の最小値、最大値を求めればよいから、直線①の傾きが $-\frac{9}{16}$ 、 y 切片が $\frac{k}{16}$ であることに注意して、領域 D と、 k が最大・最小になるときの直線①を図示すると下図のようになる。



上図より、 k が最小値をとるのは直線①が $(2, -6)$ を通るとき、最大値をとるのは直線①が領域 D と上図のように接するときである。よって、 $x = 2, y = -6$ を直線①の方程式に代入して、 k の最小値は、

$$\begin{aligned} k &= 9 \cdot 2 + 16 \cdot (-6) \\ &= -78 \end{aligned}$$

となる。また、上図の接点の座標を $(p, f(p))$ ($p < 3$) とおくと、 $x = p$ における $y = f(x)$ の接

線の傾きと、直線①の傾き $-\frac{9}{16}$ が等しくなるので、

$$\begin{aligned} f'(p) &= -\frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow -\frac{9}{(p-3)^2} &= -\frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow (p-3)^2 &= 16 \quad (\because p \neq 3) \\ \Leftrightarrow p-3 &= -4 \quad (\because p < 3) \\ \Leftrightarrow p &= -1 \end{aligned}$$

と求められる。よって $(p, f(p))$ は直線①上にあるので、 $x = -1, y = f(-1)$ を直線①の方程式

に代入して、 k の最大値は

$$\begin{aligned} k &= 9 \cdot (-1) + 16 \cdot \frac{3 \cdot (-1)}{-1-3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。次に、 C と直線 ℓ で囲まれた部分は領域 D であるから、グラフより、面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-6}^2 \left\{ \frac{3x}{x-3} - (-x-4) \right\} dx &= \int_{-6}^2 \left(\frac{9}{x-3} + x + 7 \right) dx \\ &= \left[9 \log|x-3| + \frac{1}{2}(x+7)^2 \right]_{-6}^2 \\ &= 40 - 18 \log 3 \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ													
	7	5													
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	c	g	g	1	3	d	h	5	d	6	5	1	3	1	7
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ		
	1	3	3	6	2	5	1	1	3	1	2	3	1		
	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ					
	1	2	3	2	1	2	1	1	0	3					

【解説】

(1)

P, Q の中点の座標は

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

であるから、これと原点 O を通る直線の傾きは、

$$\frac{\frac{7}{2}-0}{\frac{5}{2}-0}=\frac{7}{5}$$

となる。

(2)

以下、 k を正の実数として考える。

$$\vec{s}=(1, k)$$

は ℓ に平行なベクトルである。よって、

$$\begin{aligned}\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OP}} &= (1, k)\cdot(2, 3) \\ &= 3k+2\end{aligned}$$

であり、 $\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OP}}>0$ より、 $\vec{s}$ と $\overrightarrow{\text{OP}}$ のなす角は α となるから

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OP}}}{|\vec{s}||\overrightarrow{\text{OP}}|} \\ &= \frac{3k+2}{\sqrt{1^2+k^2}\sqrt{2^2+3^2}} \\ &= \frac{3k+2}{\sqrt{13}\sqrt{1+k^2}}\end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}} &= (1, k)\cdot(3, 4) \\ &= 4k+3\end{aligned}$$

であり、 $\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}}>0$ より、 $\vec{s}$ と $\overrightarrow{\text{OQ}}$ のなす角は β となるから

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{\vec{s}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}}}{|\vec{s}||\overrightarrow{\text{OQ}}|} \\ &= \frac{4k+3}{\sqrt{1^2+k^2}\sqrt{3^2+4^2}} \\ &= \frac{4k+3}{5\sqrt{1+k^2}}\end{aligned}$$

である。 $\alpha=\beta$ となるのは、 $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ 、 $0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\beta \\ \Leftrightarrow \frac{3k+2}{\sqrt{13}\sqrt{1+k^2}} &= \frac{4k+3}{5\sqrt{1+k^2}} \\ \Leftrightarrow 5(3k+2) &= \sqrt{13}(4k+3) \left(\because \sqrt{1+k^2}>0\right) \\ \therefore k &= \frac{6+5\sqrt{13}}{17}\end{aligned}$$

のときである。

(3)

$$\begin{aligned}u &= \frac{|t\cdot 2-3|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|2t-3|}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &= \frac{|t\cdot 3-4|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|3t-4|}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}f(t) &= u^2+v^2 \\ &= \left(\frac{|2t-3|}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{|3t-4|}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 \\ &= \frac{13t^2-36t+25}{t^2+1}\end{aligned}$$

であり、右辺の分子を分母で割ると商は 13、余りは $-12(3t-1)$ である。よって、

$$f(t)=13-\frac{12(3t-1)}{t^2+1}$$

となり、

$$\begin{aligned}f'(t) &= -\frac{12\cdot 3(t^2+1)-12(3t-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{12(3t^2-2t-3)}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3t^2-2t-3 &= 0 \left(\because (t^2+1)^2>0\right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(t)$ の増減表は以下の通りである。

t	...	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	...	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	...
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

さらに、

$$\begin{aligned}\lim_{t\rightarrow-\infty}f(t) &= \lim_{t\rightarrow-\infty}\left\{13-\frac{12\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)}{1+\frac{1}{t^2}}\right\} \\ &= 13\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) &= 13-\frac{12\left(3\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{3}-1\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2+1} \\ &= 13-\frac{12\cdot\sqrt{10}}{\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2+1}\end{aligned}$$

より、 $f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)<13$ である。したがって、 $f(t)$ は

$$t=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

のとき、最小値をとる。

【Ⅳ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ				
1	6	1	3				
オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	6	1	6	1	3	1	6
ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
e	g	g	g	a	h	a	
ト	ナ	ニ	ヌ	ネ			
7	6	2	2	3			
ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ		
1	2	g	a	h	a		
マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ		
2	2	g	a	h	a		
ユ	ヨ	ラ	リ				
2	2	1	2				

【解説】

さいころの目の出る確率はいずれも $\frac{1}{6}$ である。ここで、さいころを1回投げたとき、Pが頂点Aの上にあるのは、出た目が4となるときであるから、

$$a_1=\frac{1}{6}$$

となる。同様にさいころを1回投げたとき、Pが頂点Bにあるのは、出た目が1,5となるときであるから、

$$b_1=\frac{1}{3}$$

となる。また、Pが頂点C,Dにあり、さいころを1回投げたとき、いずれの目が出てもPは頂点C,Dに再度戻ってくる。したがって、さいころを $n+1$ 回投げたときPが頂点Aの上にあるのは、さいころを n 回投げた後にPが頂点Aの上にあり、 $n+1$ 回目の出た目が4となるとき、または n 回投げた後にPが頂点Bの上にあり、 $n+1$ 回目の出た目が3となるときであるから、

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n$$

となる。 b_{n+1} についても、同様に考えて、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n \end{aligned}$$

となる。また、数列 $\{a_n+\beta b_n\}$ が等比数列となるとき、公比を α とおくと、

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\beta b_{n+1} &= \alpha(a_n+\beta b_n) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n\right)+\beta\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n\right) &= \alpha(a_n+\beta b_n) \\ \Leftrightarrow (6\alpha-2\beta-1)a_n+(6\alpha\beta-\beta-1)b_n &= 0 \end{aligned}$$

となる。この等式がすべての n で成り立つので、

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6\alpha-2\beta-1=0 \\ 6\alpha\beta-\beta-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha-1=2\beta \\ \beta(6\alpha-1)-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha-1=2\beta \\ \beta\cdot 2\beta-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha-1=2\beta \\ \beta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

であり、 $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となる。よって、

$$\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\beta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

とおくと、 $c_n=a_n+\beta_1b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ は、

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1+\beta_1b_1 \\ &= \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

より、初項 $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$ 、公比 $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$ の等比数列であり、一般項 $c_n=a_n+\beta_1b_n$ は、

$$\begin{aligned} a_n+\beta_1b_n &= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{6} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^n \end{aligned}$$

である。同様に $d_n=a_n+\beta_2b_n$ で定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項は、

$$a_n+\beta_2b_n=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n$$

である。また、 $0<\left|\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right|<1$ より、無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}d_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{6}}{1-\frac{1-\sqrt{2}}{6}} \\ &= \frac{7-6\sqrt{2}}{23} \end{aligned}$$

である。次に、

$$\begin{cases} a_n+\frac{\sqrt{2}}{2}b_n=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^n \\ a_n-\frac{\sqrt{2}}{2}b_n=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n \end{cases}$$

の2式から、 b_n を消去すると、

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n\right\}$$

となる。同様に2式から、 a_n を消去すると、

$$b_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n\right\}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^{n+1}\right\}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{6}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)^n\right\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{6}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n} \end{aligned}$$

であり、 $0<\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|<1$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_{n+1}}{b_n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{1+\sqrt{2}}{6}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}\right)\cdot 0}{1-0} \\ &= \frac{\sqrt{2}+2}{12} \end{aligned}$$

である。

【V】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	1	3	2	3	4	3	5	3
(2)	ケ	コ						
	4	6						
(3)	サ							
	e							
(4)	シ	ス	セ	ソ	タ			
	5	6	1	3	2			

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 |\sin x| &= |\sqrt{3} \cos x| \\
 \Leftrightarrow |\sin x|^2 &= |\sqrt{3} \cos x|^2 \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x &= 3 \cos^2 x \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x &= 3(1 - \sin^2 x) \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \sin x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

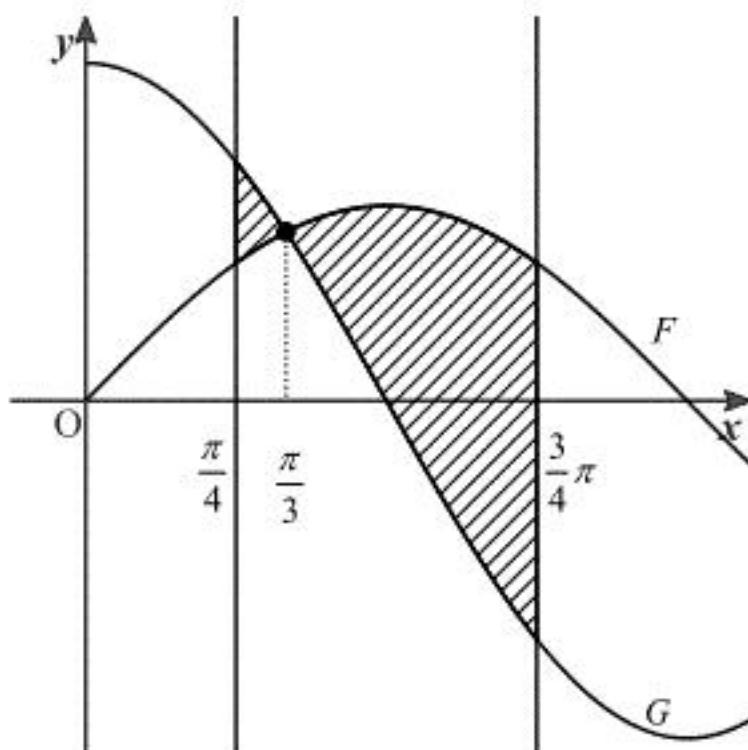
であるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において、 $|\sin x| = |\sqrt{3} \cos x|$ となる x の値は、

$$x = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

である。

(2)

F と G および 2 直線 $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$ で囲まれた部分は以下の斜線部分である。



よって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} \cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx \\
 &= \left[\sqrt{3} \sin x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left[\sqrt{3} \sin x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}\pi} \\
 &= 2 \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\sqrt{3} \sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{4}\pi \right) \\
 &= 4 - \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

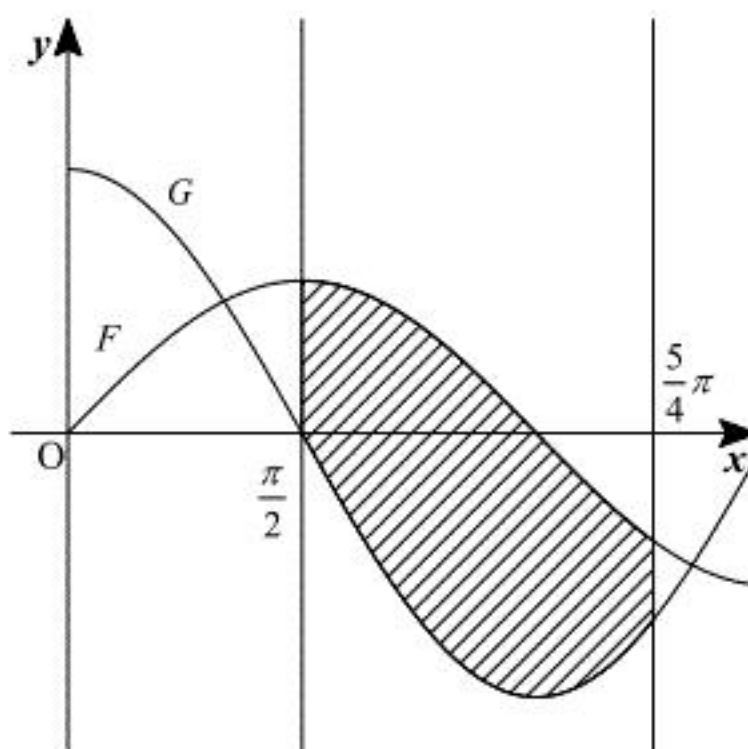
C を積分定数として、

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C
 \end{aligned}$$

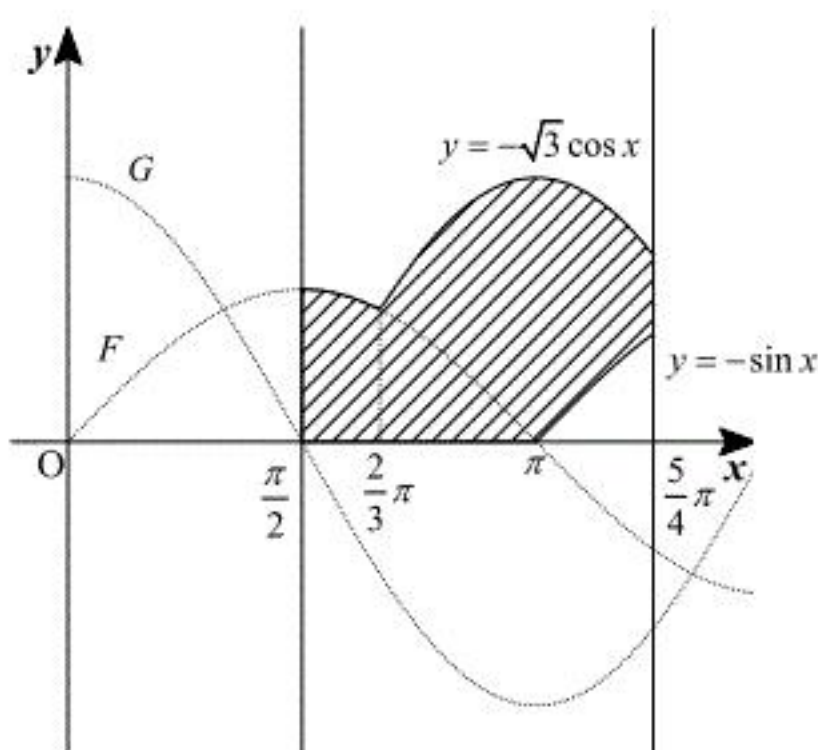
である。

(4)

F と G および 2 直線 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5}{4}\pi$ で囲まれた部分は以下の斜線部分である。



このとき、上図に示した図形の $y \leq 0$ の部分を x 軸に関して線対称に折り返すと以下の斜線部分のような図形になる。



求める立体の体積は、上図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積と等しく、それを V とおくと、

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x)^2 dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sqrt{3} \cos x)^2 dx - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x)^2 dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx + 3 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} + 3 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} - \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \\
 &= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + 3 \left(\frac{7}{24}\pi + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{5}{6}\pi + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore V &= \frac{5}{6}\pi^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \pi
 \end{aligned}$$

となる。