

【I】

(1)

$$x-4y-7=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$$

$$4x+5y-7=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$$

$$5x+y+7=0 \Leftrightarrow y=-5x-7$$

より、これら3直線の交点を考える。 $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$ と $y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$ の交点を点Aとおくと、点Aの x 座標は、

$$\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$$

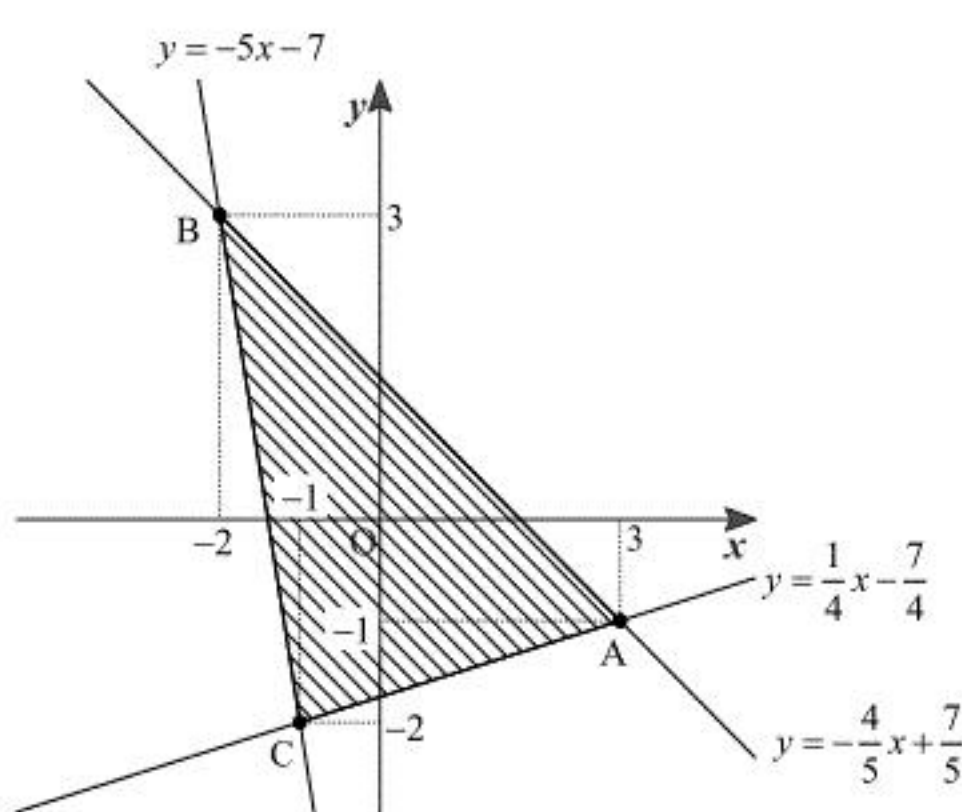
$$\Leftrightarrow \frac{21}{20}x=\frac{63}{20}$$

$$\therefore x=3$$

となり、これを $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$ に代入することにより $A(3, -1)$ を得る。同様に $y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$ と

$y=-5x-7$ の交点をB、 $y=-5x-7$ と $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$ の交点をCとすると、 $B(-2, 3)$ 、 $C(-1, -2)$

である。以上より $y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$ 、 $y=-5x-7$ 、 $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$ を図示すると下図を得る。また、領域Dは以下の斜線部分として表される。



よって、領域Dの面積を S とするとこれは $\triangle ABC$ の面積であり、

$\overline{AB}=(-5, 4)$ 、 $\overline{AC}=(-4, -1)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{41 \cdot 17 - 16^2} \\ &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{21}{2}$

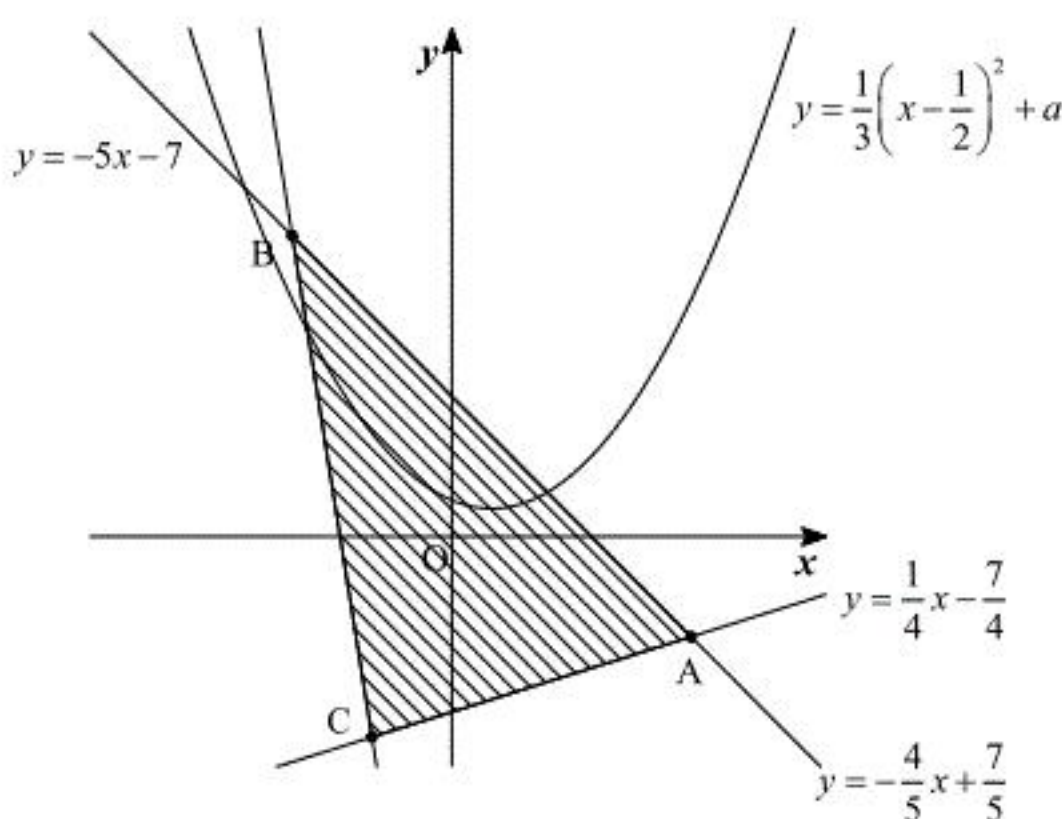
(2)

$$4x^2-4x-12y+12a+1=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$$

である。これは軸 $x=\frac{1}{2}$ 、下に凸な放物線であり、 a がある値以下ではDとEは共通部分をも

つことがわかる。ここで、Dと放物線 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ を図示すると下図を得る。



上図より、放物線 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ が線分ABと接しうる場合、放物線 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ が線

分ABと接するとき、 a は最大値をとることがわかる。さて、方程式 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ と方

程式 $y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$ を連立して y を消去すると、

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2+\frac{7}{15}x+a-\frac{79}{60}=0$$

$$\Leftrightarrow 20x^2+28x+60a-79=0$$

となる。放物線 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ が直線 $y=-\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$ と接するとき、この方程式の判別式の値が0になるから、

$$14^2-20(60a-79)=0$$

$$\Leftrightarrow 1200a=1776$$

$$\therefore a=\frac{37}{25}$$

である。ここで、この値は $-2 \leq a \leq 3$ を満たすから、放物線 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a$ が線分ABと接するときの a の値であることがわかる。したがって、DとEの共通部分が空集合にならない

a の値の最大値は $\frac{37}{25}$ であることから、題意を満たすのは $a \leq \frac{37}{25}$ のときとなる。

(答) $a \leq \frac{37}{25}$

〔Ⅱ〕

(1)

得点の合計が0点となるのは、6回の試行ですべて同じ色の球を取り出す場合である。ここで、各試行で白球を取り出す確率は $\frac{2}{3}$ であり、赤球を取り出す確率は $\frac{1}{3}$ である。したがって、求める確率は、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{65}{729}$$

である。

(答) $\frac{65}{729}$

(2)

得点の合計が2点となるのは、 $k=1, 2, 3, 4, 5$ に対して、1回目から k 回目までの試行ですべて白球を取り出し、 $k+1$ 回目から6回目までの試行ですべて赤球を取り出す場合である。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} &= \frac{1}{3^6} \cdot \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{2 \cdot (2^5 - 1)}{729} \\ &= \frac{62}{729} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{62}{729}$

(3)

得点の合計が6点となるのは、6回の試行で取り出した球の色が、

白赤白赤白白、白赤白赤赤白、白赤白白赤白、白赤赤白赤白、白白赤白赤白

赤白赤白赤赤、赤白赤白白赤、赤白赤赤白赤、赤白白赤白赤、赤赤白赤白赤

のいずれかの順番となるときである。白玉と赤玉が取り出された回数で分類すると、

白玉が4回、赤玉が2回取り出される場合が3通り

白玉が3回、赤玉が3回取り出される場合が4通り

白玉が2回、赤玉が4回取り出される場合が3通り

となるため、得点の合計が6点となる確率は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3 &= \frac{48+32+12}{729} \\ &= \frac{92}{729} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{92}{729}$

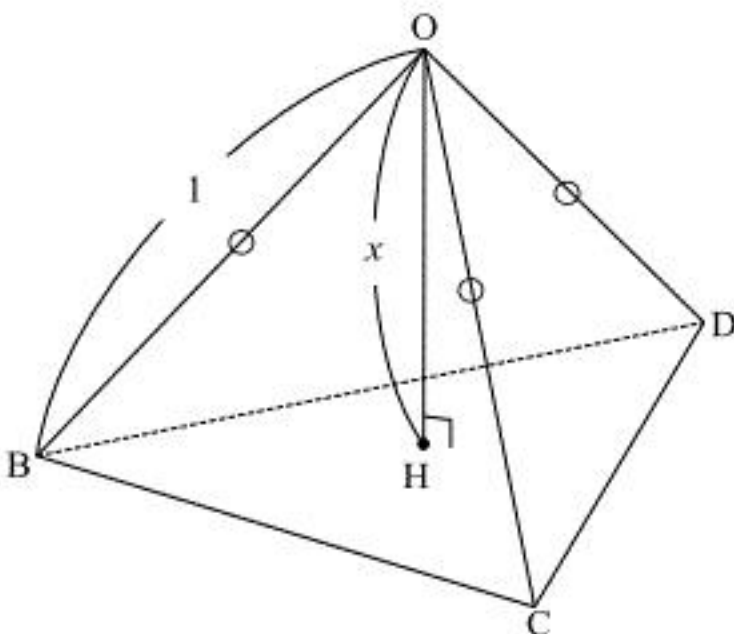
【Ⅲ】

(1)

三角形BCDの重心であるGは中心O、半径1の球の内部(球面上は含まない)に存在するから、2点G、O間の距離である x は

$$0 \leq x < 1$$

を満たす。以下、この条件の下で考える。さて、Oから三角形BCDに下ろした垂線の足をHとすると、各点の位置関係は以下の図のように考えられる。



このとき、三角形OBH、OCH、ODHにおいて、

$$\begin{cases} OB = OC = OD = 1 \quad (\because \text{球の半径}) \\ \angle OHB = \angle OHC = \angle OHD = 90^\circ \\ OH \text{ は共通} \end{cases}$$

であることより、三角形OBH≡三角形OCH≡三角形ODHと分かる。よって

$$BH = CH = DH$$

が成立するから、Hは三角形BCDの外心となる。ここで、一般に正三角形の外心と重心が一致することを考えると、

$$H \text{ と } G \text{ は同一の点}$$

であると言える。よってOG⊥BGとなるから、三角形OBGに三平方の定理を用いることで

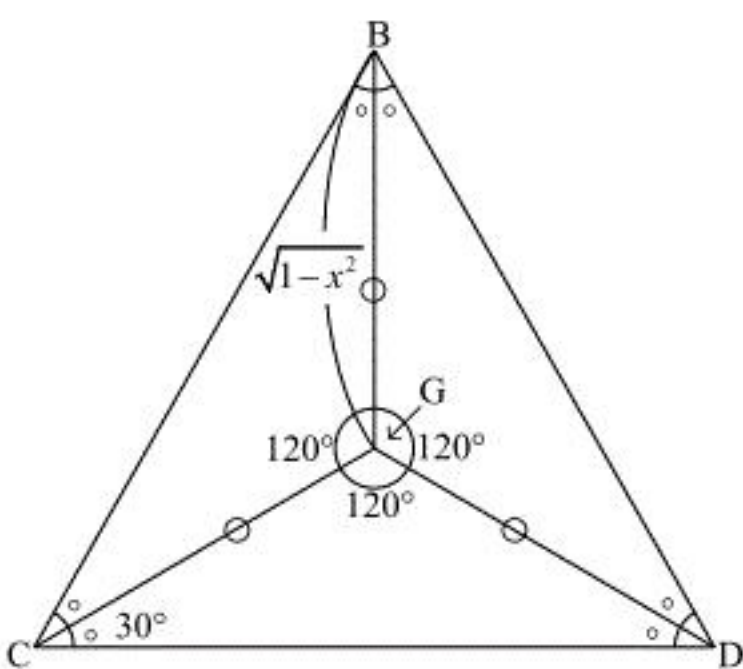
$$BG^2 + OG^2 = OB^2$$

$$\Leftrightarrow BG^2 = 1^2 - x^2$$

$$\therefore BG = \sqrt{1-x^2} \quad (\because BG > 0)$$

が得られる。同様に考えると、CG=DG=√(1-x²)も分かる。さて、正三角形BCDの外心かつ

重心であるGは、この三角形の内心でもあるから、図示すると以下のようになる。



図より、三角形BCDの面積は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sin 120^\circ \right) \cdot 3 = \frac{3}{4} \sqrt{3} (1-x^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4} \sqrt{3} (1-x^2)$$

(2)

四面体ABCDの体積 V が最大となるのは、三角形BCDを含む平面とAの距離が最も離れるとき、すなわち3点G、O、Aがこの順に同一直線上に並ぶときである。このとき、四面体ABCDの底面を三角形BCDとして考えると、高さは

$$AG = AO + OG = 1 + x$$

であるから、体積は

$$V = \frac{3}{4} \sqrt{3} (1-x^2) \cdot (1+x) \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x)(1+x)^2$$

となる。以上より、 $x = \frac{1}{2}$ のときの V の最大値は

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{32} \sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{32} \sqrt{3}$$

(3)

(2)と同様に考えると、求めたい V の最大値は、 $0 \leq x < 1$ の範囲での

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1-x)(1+x)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-x^3 - x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

の最大値に一致する。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-3x^2 - 2x + 1) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} (3x-1)(x+1) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			極大		

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ のときに最大値

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} \sqrt{3}$$

をとる。以上より、 V の最大値は $\frac{8}{27} \sqrt{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{27} \sqrt{3}$$