

# 【I】

(1)

$a = -1$  のとき、絶対値の中身の正負に注意して、

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (2x+1) - 1 & (x \geq -\frac{1}{2}) \\ x^2 + (2x+1) - 1 & (x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & (x \geq -\frac{1}{2}) \\ x^2 + 2x & (x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

となる。よって、 $f(x) = 0$  の解は

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ かつ } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$$

および、

$$x^2 + 2x = 0 \text{ かつ } x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \text{ かつ } x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

となる。

(答)  $x = -2, 1 + \sqrt{3}$

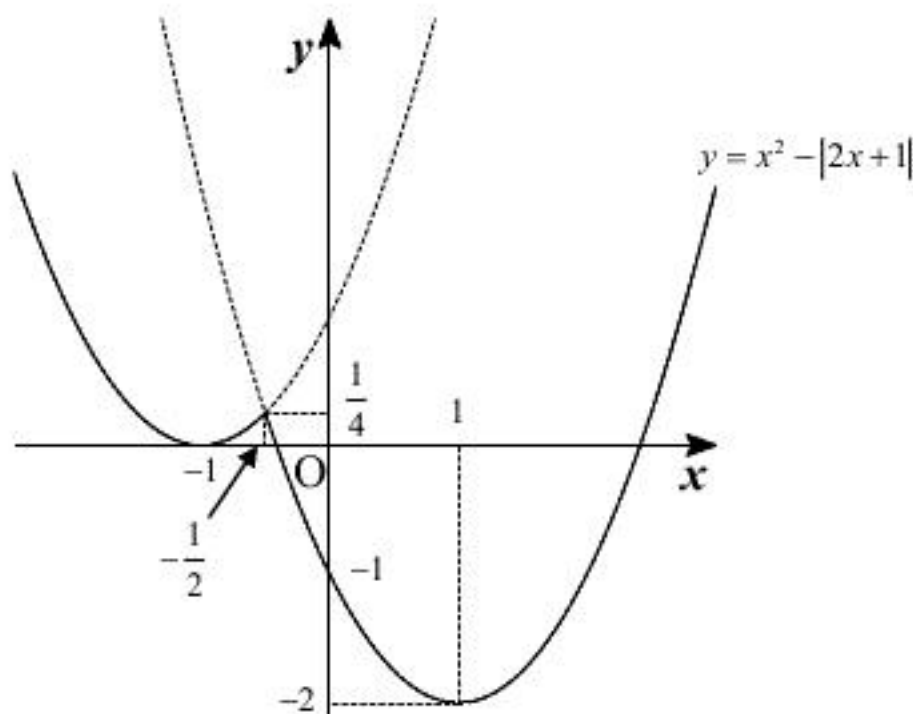
(2)

$f(x) = 0$  の異なる実数解の個数は  $y = x^2 - |2x+1|$  と直線  $y = -a$  の共有点の個数に等しい。絶対値の中身の正負に注意して、

$$x^2 - |2x+1| = \begin{cases} x^2 - (2x+1) & (x \geq -\frac{1}{2}) \\ x^2 + (2x+1) & (x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-1)^2 - 2 & (x \geq -\frac{1}{2}) \\ (x+1)^2 & (x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

となる。よって、 $y = x^2 - |2x+1|$  を図示すると以下の実線のようになる。



上図より、 $y = x^2 - |2x+1|$  と直線  $y = -a$  が共有点を 4 つ持つ条件は、

$$0 < -a < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < a < 0$$

となる。

(答)  $-\frac{1}{4} < a < 0$

## 【Ⅱ】

(1)

A氏が取り出す球の組み合わせについて考える。

- [1]  $\alpha$  から赤球,  $\beta$  から赤球を取り出す場合
- [2]  $\alpha$  から赤球,  $\beta$  から白球を取り出す場合
- [3]  $\alpha$  から白球,  $\beta$  から赤球を取り出す場合
- [4]  $\alpha$  から白球,  $\beta$  から白球を取り出す場合

の4通りの場合があり, これらが起こる確率はそれぞれ  $\frac{1}{4}$  である。また, A氏を取り出した赤

球は全て  $\alpha$  に戻すため, A氏が操作を終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球の個数は変わらないか1増すかのいずれかである。同様に, B氏を取り出した赤球は全て  $\beta$  に戻すため, B氏が操作を終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球の個数は変わらないか1減るかのいずれかである。これらを踏まえると,

操作Pを終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球の個数は1, 2, 3のいずれかに限られる。(※)

操作Pを終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球が1個の場合について考えると, A氏の操作によって  $\alpha$  の中の赤球の個数が変わらず, B氏の操作によって  $\alpha$  の中の赤球の個数が減ればよい。すなわち, A氏の操作は[2], [4]のいずれかに限られる。

[2]の場合

A氏の操作後に,  $\alpha$  には赤球が2個, 白球が2個入っている。赤球が1個になるには, B

氏が  $\alpha$  から赤球を取り出せばよく, その確率は  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  であるから, [2]が起きる確率と合

わせて, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

となる。

[4]の場合

A氏の操作後に,  $\alpha$  には赤球が2個, 白球が1個入っている。赤球が1個になるには, B

氏が  $\alpha$  から赤球を取り出せばよく, その確率は  $\frac{2}{3}$  であるから, [4]が起きる確率と合わせ

て, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

となる。

以上より, 求める確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$$

となる。

(答)  $\frac{7}{24}$

(2)

まず, 操作Pを終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球が3個の場合について考える。このとき, A氏の操作によって  $\alpha$  の中の赤球の個数が増え, B氏の操作によって  $\alpha$  の中の赤球の個数が変わらなければよい。すなわち, A氏の操作は[1], [3]のいずれかに限られる。

[1]の場合

A氏の操作後に,  $\alpha$  には赤球が3個, 白球が2個入っている。赤球が3個のままであるた

めには, B氏が  $\alpha$  から白球を取り出せばよく, その確率は  $\frac{2}{5}$  であるから, [1]が起きる確

率と合わせて, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

となる。

[3]の場合

A氏の操作後に,  $\alpha$  には赤球が3個, 白球が1個入っている。赤球が3個のままであるた

めには, B氏が  $\alpha$  から白球を取り出せばよく, その確率は  $\frac{1}{4}$  であるから, [3]が起きる確

率と合わせて, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

となる。

以上より, 操作Pを終えた時点で  $\alpha$  の中の赤球が3個である確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{16} = \frac{13}{80}$$

となる。(※)より, 操作P後に  $\alpha$  の中の赤球が2個ある事象は, 赤球が1個ある事象と3個ある事象の和事象の余事象であるから, 求める確率は

$$1 - \frac{7}{24} - \frac{13}{80} = \frac{131}{240}$$

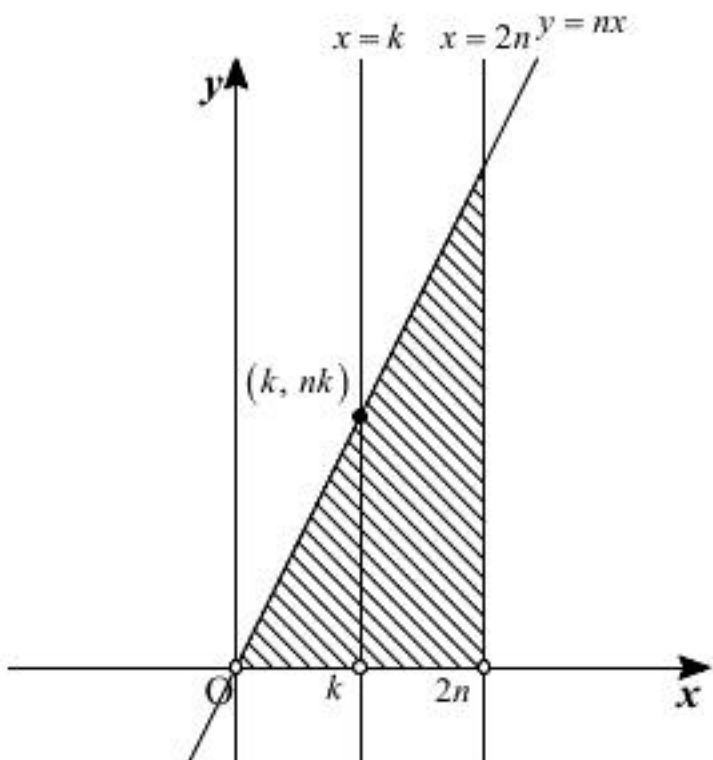
となる。

(答)  $\frac{131}{240}$

〔Ⅲ〕

(1)

$x \leq 2n$  かつ  $0 < y \leq nx$  をみたす領域を  $D$  とすると、領域  $D$  に含まれる格子点の個数が  $S_n$  である。この領域を図示すると下図の斜線部となる。ただし、境界は  $y=0$  のみ含まない。



よって、領域  $D$  に含まれる格子点は全て直線  $x=k$  ( $k=1, 2, \dots, 2n$ ) 上にある。領域  $D$  と直線  $x=k$  の共通部分は  $x=k$  かつ  $0 < y \leq nk$  であり、 $0, nk$  は整数であるから、この部分に含まれる格子点の個数は  $nk-0=nk$  (個) である。したがって、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{2n} nk \\ &= n \cdot \sum_{k=1}^{2n} k \\ &= n \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= n^2(2n+1) \end{aligned}$$

となるから、 $n=2$  のとき

$$\begin{aligned} S_2 &= 2^2(2 \cdot 2 + 1) \\ &= 20 \end{aligned}$$

となる。

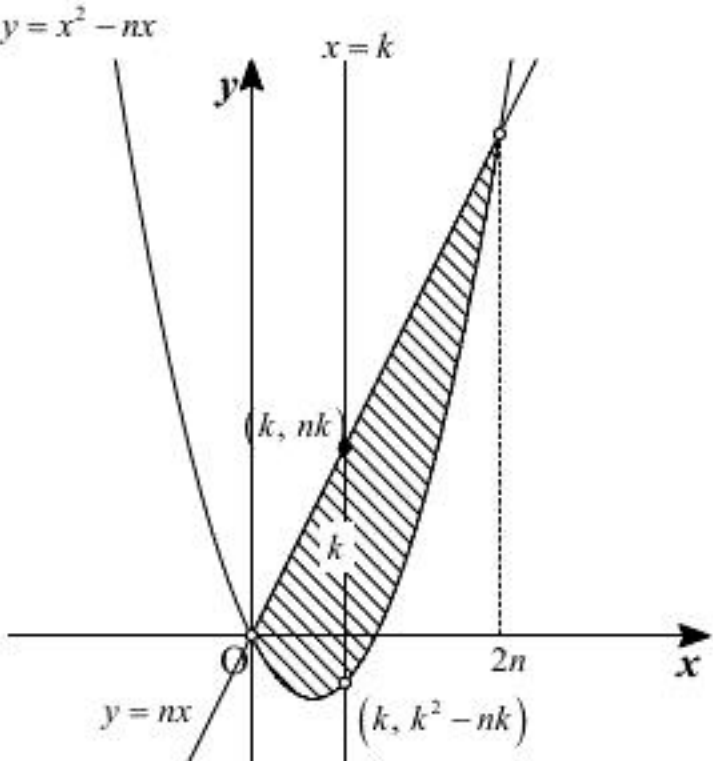
(答)  $S_2 = 20$

(2)

$x^2 - nx < y \leq nx$  をみたす領域を  $E$  とすると、領域  $E$  に含まれる格子点の個数が  $T_n$  である。

$$x^2 - nx = nx \Leftrightarrow x(x - 2n) = 0$$

となるから、この領域を図示すると下図の斜線部となる。ただし、境界は  $y=x^2-nx$  のみ含まない。



よって、領域  $E$  に含まれる格子点は全て直線  $x=k$  ( $k=1, 2, \dots, 2n-1$ ) 上にある。領域  $E$  と直線  $x=k$  の共通部分は  $x=k$  かつ  $k^2-nk < y \leq nk$  であり、 $k^2-nk, nk$  は整数であるから、この部分に含まれる格子点の個数は  $nk-(k^2-nk)=2nk-k^2$  (個) である。したがって、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{2n-1} (2nk - k^2) \\ &= 2n \cdot \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \\ &= 2n \cdot \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{2n(2n-1)(4n-1)}{6} \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2} \left( 2n - \frac{4n-1}{3} \right) \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} \\ &= \frac{1}{3} n(2n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

となるから、 $n=10$  のとき

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{10}{3} (2 \cdot 10 + 1) (2 \cdot 10 - 1) \\ &= 1330 \end{aligned}$$

となる。

(答)  $T_{10} = 1330$

(3)

(1), (2) で求めた  $T_n, S_n$  を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{S_n} &> 0.66 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} n(2n+1)(2n-1)}{n^2(2n+1)} &> 0.66 \\ \Leftrightarrow \frac{2n-1}{3n} &> 0.66 \\ \Leftrightarrow 2n-1 &> 1.98n \quad (\because 3n > 0) \\ \Leftrightarrow 0.02n &> 1 \\ \Leftrightarrow n &> 50 \end{aligned}$$

となる。よって、条件をみたす正の整数  $n$  の最小値は 51 である。

(答) 51