

【I】

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} &= 3a_n - b_n && \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

に $n=1$ を代入すると $a_1=2, b_1=1$ より,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \\ b_2 &= 3a_1 - b_1 \\ &= 3 \cdot 2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

が得られる。また、 $\textcircled{1}$ に $n=2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + b_2 \\ &= 3 + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $a_2=3, a_3=8$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ \Leftrightarrow b_n &= a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3a_n - b_n \\ \Leftrightarrow (a_{n+2} - a_{n+1}) &= 3a_n - (a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= 4a_n \end{aligned}$$

となる。ここで、 n が偶数のとき、正の整数 m を用いて $n=2m$ とおくと

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_n \\ \Leftrightarrow a_{2(m+1)} &= 4a_{2m} \end{aligned}$$

となり、 $a_2=3$ から数列 $\{a_{2m}\}$ は初項3、公比4の等比数列となる。したがって、数列 $\{a_{2m}\}$ の一般項は、

$$a_{2m} = 3 \cdot 4^{m-1}$$

となり、最後に m を n に置き換えて、

$$a_{2n} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

となる。

(答) $a_{2n} = 3 \cdot 4^{n-1}$

$$(3) \quad \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= (a_n + b_n) - (3a_n - b_n) \\ &= -2(a_n - b_n) \\ &= -2c_n \end{aligned}$$

であるので、数列 $\{c_n\}$ は公比 -2 の等比数列である。

(証明終)

$$(4) \quad c_n = a_n - b_n$$

に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 - b_1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

が得られるので、(3)より $\{c_n\}$ は初項1、公比 -2 の等比数列であり、 $\{c_n\}$ の一般項は、

$$c_n = (-2)^{n-1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^n (-2)^{k-1} \\ &= \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} \\ &= \frac{1 - (-2)^n}{3} \end{aligned}$$

である。ここで、 n が奇数のとき、 $n \geq 1$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1 - (-2)^n}{3} &> 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k &> 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k &> \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

である。また、 n が偶数のとき、 $n \geq 2$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1 - (-2)^n}{3} &< 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k &< 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k &< \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

である。以上より、

$$n \text{ が奇数のとき, } \sum_{k=1}^n a_k > \sum_{k=1}^n b_k$$

$$n \text{ が偶数のとき, } \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k$$

となる。

(答) n が奇数のとき、 $\sum_{k=1}^n a_k > \sum_{k=1}^n b_k$

n が偶数のとき、 $\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k$

〔Ⅱ〕

(1)

$$f(x)=3x^3-9x \text{ より,}$$

$$f'(x)=9x^2-9$$

$$=9(x-1)(x+1)$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	-2	…	-1	…	1	…	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-6	↗	6	↘	-6	↗	6

よって、 $f(x)$ の $-2 \leq x \leq 2$ における最大値 M の値は6である。

(答) $M=6$

(2)

$$g(x)=3x^3-ax$$

より、(1)の結果から、 $x=2$ において $|g(x)| \geq M$ となるような定数 a の範囲は

$$|g(2)| \geq M$$

$$\Leftrightarrow 2|12-a| \geq 6$$

$$\therefore a \leq 9, 15 \leq a$$

である。 $a>0$ と合わせて、求める定数 a の値の範囲は

$$0 < a \leq 9, 15 \leq a$$

である。

(答) $0 < a \leq 9, 15 \leq a$

(3)

$$g'(x)=9x^2-a$$

より、

$$g'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{a}}{3} (\because a>0)$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	…	$-\frac{\sqrt{a}}{3}$	…	$\frac{\sqrt{a}}{3}$	…
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

すなわち、 $g(x)$ は $x=-\frac{\sqrt{a}}{3}$ で極大値、 $x=\frac{\sqrt{a}}{3}$ で極小値をとるから、 $-2 \leq x \leq 2$ において

$g(x)$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲は

$$(0<)\frac{\sqrt{a}}{3} \leq 2 \text{ かつ } -2 \leq -\frac{\sqrt{a}}{3} (<0)$$

$$\therefore 0 < a \leq 36$$

である。

(答) $0 < a \leq 36$

(4)

$x=1$ において $|g(x)| \geq M$ となるような定数 a の範囲は、

$$|g(1)| \geq M$$

$$\Leftrightarrow |3-a| \geq 6$$

$$\therefore 9 \leq a (\because a>0)$$

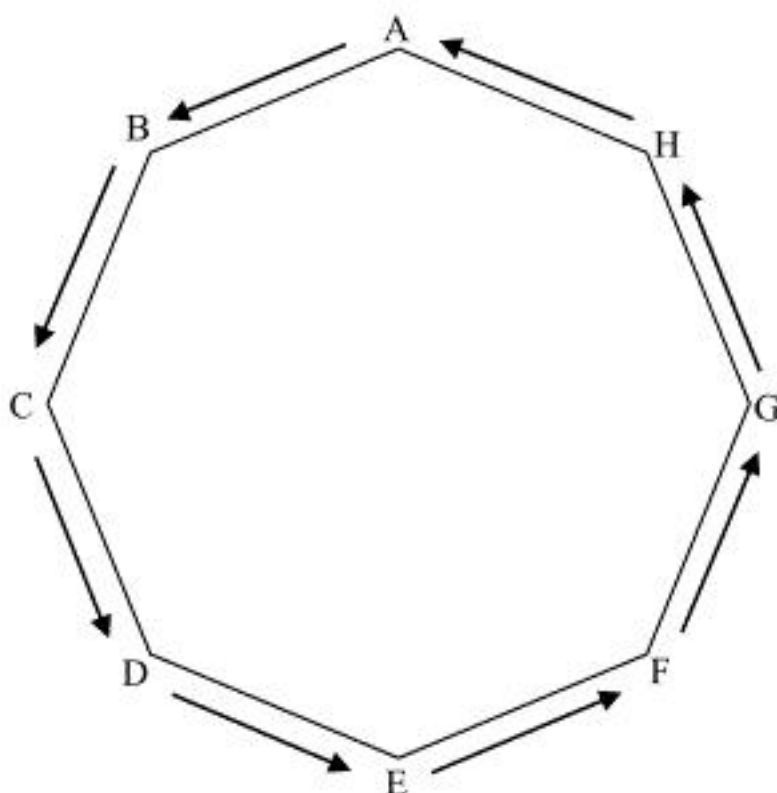
である。また、(2)より $0 < a \leq 9$ において $x=2$ とすると $|g(x)| \geq M$ を満たす。以上より、

$-2 \leq x \leq 2$ において $|g(x)| \geq M$ となる x が、すべての定数 a の値に対し存在する。

(証明終)

〔Ⅲ〕

(1)①



さいころは1から6の目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で出るとする。さいころを2回投げたとき、目の和は2以上12以下である。よって、 $n=2$ のとき、点Qが頂点Eにいるのは、2回投げたときの目の和が4または12となる場合である。このとき、2回の目の出方は、順番も考慮すれば、 $(1, 3), (2, 2), (3, 1), (6, 6)$ の4通りである。よって、 $n=2$ のとき、点Qが頂点Eにいる確率は、

$$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$

②

さいころを3回投げたとき、目の和は3以上18以下である。よって、 $n=3$ のとき、点Qが頂点Aにいるのは、3回投げたときの目の和が8または16となる場合である。このとき、3回の出目を a, b, c とすると、

$$\{a, b, c\} = \{1, 1, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 2, 4\}, \{2, 3, 3\}, \{4, 6, 6\}, \{5, 5, 6\}$$

となる。ただし、順番は考えていない。

[1] $\{a, b, c\} = \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}$ のとき

目の出方はそれぞれ

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] $\{a, b, c\} = \{1, 1, 6\}, \{2, 2, 4\}, \{2, 3, 3\}, \{4, 6, 6\}, \{5, 5, 6\}$ のとき

目の出方はそれぞれ

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{ (通り)}$$

ある。

以上[1], [2]より、 $n=3$ のとき、点Qが頂点Aにいる確率は、

$$(2 \cdot 6 + 5 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$

(2)①

「少なくとも1回、出る目の数が2以下となる」事象は、「出る目がすべて3以上となる」事象の余事象である。したがって、

$$\begin{aligned} p(n) &= 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} p(3) &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{19}{27}$

②

まず、

$$\begin{aligned} p(n) &> 0.9 \\ \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n &> 0.9 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{10} &> \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である。また、 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は n について単調に減少し、

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{32}{243} > \frac{1}{10} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^6 &= \frac{64}{729} < \frac{1}{10} \end{aligned}$$

となるから、 $p(n) > 0.9$ となる最小の自然数 n として6を得る。

(答) $n=6$