

【I】

【解答】

|     |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1) | <div>ア</div> | <div>イ</div> |              |              |              |              |              |              |              |
|     | 1            | 1            |              |              |              |              |              |              |              |
| (2) | <div>ウ</div> | <div>エ</div> | <div>オ</div> | <div>カ</div> | <div>キ</div> | <div>ク</div> | <div>ケ</div> | <div>コ</div> | <div>サ</div> |
|     | 3            | 2            | 1            | 2            | 2            | 7            | －            | 6            | 7            |
| (3) | <div>シ</div> | <div>ス</div> | <div>セ</div> | <div>ソ</div> |              |              |              |              |              |
|     | 1            | 4            | 1            | 2            |              |              |              |              |              |
| (4) | <div>タ</div> | <div>チ</div> | <div>ツ</div> | <div>テ</div> | <div>ト</div> | <div>ナ</div> | <div>ニ</div> |              |              |
|     | －            | 4            | 4            | －            | 5            | 1            | 3            |              |              |

【解説】

- (1)
- 命題  $p$  について、 $\sqrt{2}$  は無理数である。ここで  $a, b$  の少なくとも一方が 0 でないとする。
- [1]  $a=0, b\neq 0$  のとき
- $$\sqrt{2}b=0\Leftrightarrow b=0$$
- となり不適となる。
- [2]  $a\neq 0, b=0$  のとき
- $$a=0$$
- となり不適となる。
- [3]  $a\neq 0, b\neq 0$  のとき
- $$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$$
- となり、 $\sqrt{2}$  が無理数であることに反する。
- 以上、[1]～[3]より  $p\Rightarrow q$  は真となる。一方で、命題  $q$  が成り立つとき、 $p$  の左辺と右辺が共に 0 になる。よって、 $q\Rightarrow p$  も真となる。

- (2)
- 与えられた数式を有理化すると、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}&=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{3+2\sqrt{2}}{2-1}\\&=3+2\sqrt{2}\\\frac{1}{2+\sqrt{2}}&=\frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\&=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x+\frac{1}{2+\sqrt{2}}y&=\sqrt{2}\\\Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})x+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y&=\sqrt{2}\\\Leftrightarrow (3x+y)+\left(2x-\frac{y}{2}-1\right)\sqrt{2}&=0\end{aligned}$$

であり、 $3x+y, 2x-\frac{y}{2}-1$  が有理数であることから、(1)の結果を用いて

$$\begin{cases}3x+y=0\\2x-\frac{y}{2}-1=0\end{cases}$$

となり、これを解いて

$$x=\frac{2}{7}, y=-\frac{6}{7}$$

を得る。

- (3)
- $$\begin{cases}x^2-2ax+b+1=0 & \cdots \textcircled{1}\\x^2-bx+5a+3=0 & \cdots \textcircled{2}\end{cases}$$
- とする。①は実数係数の 2 次方程式である。よって、虚数  $\alpha$  を解に持つことから  $\overline{\alpha}$  も解となる。解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=2a & \cdots \textcircled{3}\\\alpha\overline{\alpha}=b+1 & \cdots \textcircled{4}\end{cases}$$

となる。②も同様にして解と係数の関係より

$$\begin{aligned}\begin{cases}(\alpha+1)+(\overline{\alpha}+1)=b\\(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=5a+3\end{cases}\\\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=b-2 & \cdots \textcircled{5}\\\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}=5a+2 & \cdots \textcircled{6}\end{cases}\end{aligned}$$

となる。ここで③、⑤より

$$2a=b-2 \qquad \cdots \textcircled{7}$$

である。また③、④、⑥より

$$\begin{aligned}b+1+2a&=5a+2\\\Leftrightarrow 3a-b&=-1 \qquad \cdots \textcircled{8}\end{aligned}$$

となる。⑦、⑧を解くことで

$$a=1, b=4$$

と求まる。よって、①にこれらを代入して解は

$$\begin{aligned}x^2-2x+5&=0\\\therefore x&=1\pm 2i\end{aligned}$$

となる。

- (4)
- $P\cap Q$  が空集合ではないことから

$$\begin{cases}x^2+ax+3=0\\x^2-ax-5=0\end{cases}$$

が共通解を持つ。よって共通解を  $k$  とすると

$$\begin{aligned}\begin{cases}k^2+ak+3=0\\k^2-ak-5=0\end{cases}\\\Leftrightarrow \begin{cases}2k^2-2=0\\2ak+8=0\end{cases}\\\Leftrightarrow \begin{cases}k=\pm 1 & \cdots \textcircled{1}\\2ak+8=0 & \cdots \textcircled{2}\end{cases}\end{aligned}$$

となる。

- [1]  $k=1$  のとき

②に代入して

$$\begin{aligned}2a+8&=0\\\Leftrightarrow a&=-4\end{aligned}$$

となる。

- [2]  $k=-1$

②に代入して

$$\begin{aligned}-2a+8&=0\\\Leftrightarrow a&=4\end{aligned}$$

となる。

$a=-4$  のとき  $P, Q$  について

$$\begin{cases}x^2-4x+3=0\\x^2+4x-5=0\end{cases}$$

となるのでこれらを解いて

$$\begin{aligned}\begin{cases}x^2-4x+3=0\\x^2+4x-5=0\end{cases}\\\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-3)=0\\(x+5)(x-1)=0\end{cases}\\\Leftrightarrow \begin{cases}x=1, 3\\x=-5, 1\end{cases}\end{aligned}$$

となるので

$$P\cup Q=\{-5, 1, 3\}$$

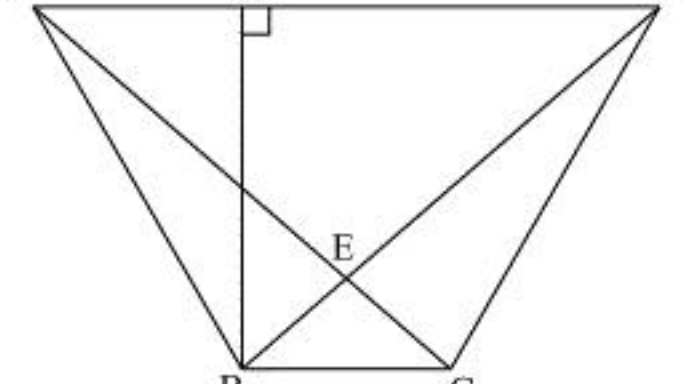
と求まる。

【Ⅱ】

【解答】

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ |
| 3 | － | 3 | 1 |
| オ | カ | キ | ク |
| 4 | 1 | 4 | 3 |
| ケ | コ | サ | シ |
| 4 | 3 | 3 | － |
| ス | セ | ソ | タ |
| 1 | 4 | 3 | 3 |
| チ | ツ | テ | ト |
| 3 | 3 | 5 | 4 |
| ナ | ニ | ヌ | ネ |
| 3 | 6 | 4 | 3 |
| ノ | ハ | ヒ |   |
| 5 | 3 | 9 |   |

【解説】



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{6+4\sqrt{3}}{3} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{3+4\sqrt{3}}{3} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \cdots (\star)$$

とする。AD//BC, BC=r, AD=3r より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= 3\overrightarrow{BC} \\ &= 3(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OA} \cdot 3(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 3(-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= 3\left(-\frac{6+4\sqrt{3}}{3} + \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -3 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。AD//BC より平行線の比の性質から

$$AE:CE = AD:BC = 3:1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるので, AC:CE=4:1となり

$$\frac{EC}{AC} = \frac{1}{4}$$

となる。また, ②より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OC}}{3+1} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となり, この式を整理して

$$\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OE} - 3\overrightarrow{OC}$$

を得る。よって, (★)と合わせて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OA} \cdot (4\overrightarrow{OE} - 3\overrightarrow{OC}) \\ &= 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} - 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 4 \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{3+4\sqrt{3}}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

を得るので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} &= 3 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。よって, これを利用して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= -3 + \frac{6+4\sqrt{3}}{3} \\ &= -1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

を得る。また, ①より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} &= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。加えて内積の定義と③に注意して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \theta \\ &= 3\sqrt{3}r \cos \theta \end{aligned}$$

となるので, 以上2式より

$$\begin{aligned} 3 &= 3\sqrt{3}r \cos \theta \\ \Leftrightarrow r \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。またBからADに下した垂線の足をHとして台形ABCDが等脚台形であることに注意すれば

$$AH = r$$

であるからAB=2rと合わせて∠BADが鋭角であることに注意して

$$\begin{aligned} \cos \angle BAD &= \frac{1}{2} \\ \therefore \angle BAD &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。よって, 内積の定義に注意して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}| \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{3}r \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\left(-1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と計算できるので, 以上2式から

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}r \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow r \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow r \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{-4+\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

を得る。ここで加法定理より

$$\begin{aligned} r \left( \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{-4+\sqrt{3}}{6} \\ \Leftrightarrow r \left( \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) &= \frac{-4+\sqrt{3}}{6} \\ \Leftrightarrow r \cos \theta - \sqrt{3}r \sin \theta &= \frac{-4+\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。この両辺を $r \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ で割ることで

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{3} \tan \theta &= \frac{-4+\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって $\cos \theta > 0$ に注意して

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow 1 + \left( \frac{4}{3} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \therefore \cos \theta &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅲ】

【解答】

|     |       |   |   |   |   |  |  |
|-----|-------|---|---|---|---|--|--|
| (1) | (i)   | ア | イ |   |   |  |  |
|     |       | 4 | 9 |   |   |  |  |
|     | (ii)  | ウ | エ |   |   |  |  |
|     |       | 1 | 9 |   |   |  |  |
|     | (iii) | オ | カ |   |   |  |  |
|     |       | 1 | 2 |   |   |  |  |
| (2) | (i)   | キ | ク | ケ |   |  |  |
|     |       | 5 | 6 | 3 |   |  |  |
|     | (ii)  | コ | サ | シ | ス |  |  |
|     |       | 2 | 3 | 6 | 3 |  |  |
|     | (iii) | セ | ソ |   |   |  |  |
|     |       | 4 | 9 |   |   |  |  |
|     | (iv)  | タ | チ | ツ | テ |  |  |
|     |       | 1 | 1 | 4 | 6 |  |  |

【解説】

(1)(i)  
 $M$  が偶数となるのは、一の位が偶数となる時である。ここで1から9のそれぞれのカードが一の位となる確率は同様に確からしいことに注意して

$$\frac{4}{9}$$

となる。

(ii)  
 $M$  の総数は ${}_9P_4$ 通りである。一方で、 $2000 \leq M \leq 2020$  を満たす $M$  は存在しないので、 $1000 \leq M < 2000$  となる場合のみを考えれば良い。これは $M$  の千の位が1となるときなので、 ${}_8P_3$ 通り存在し、この確率は

$$\frac{{}_8P_3}{{}_9P_4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{9}$$

となる。

(iii)  
 $M$  が偶数かつ2020以下である場合を考える。 $2000 \leq M \leq 2020$  を満たす $M$  は存在しないので、 $1000 \leq M < 2000$  を満たす偶数を考えればよい。千の位が1で、一の位が偶数であればよい。一の位の選び方は4通り、十の位と百の位の選び方が ${}_7P_2$ 通りあることから、求める確率は

$$\frac{4 \cdot {}_7P_2}{{}_9P_4} = \frac{1}{18}$$

となる。よって、 $M$  が偶数または2020以下になるのは(i), (ii)と合わせて

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)(i)  
 $N$  の一の位が6となるのは、引いた4枚のカードの最大値が6であるときである。このような場合は1から5の中から3枚の選び方を考えて ${}_5C_3$ 通りある。よって、確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{5}{63}$$

となる。

(ii)  
 $N$  が偶数となるとき、選んだカードのうち2が最も大きくなることはないので一の位としては4, 6, 8の3つの場合が考えられる。各場合のカードの選び方は(i)と同様にして考えると、それぞれ ${}_3C_3$ 通り、 ${}_5C_3$ 通り、 ${}_7C_3$ 通りとなる。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_3C_3 + {}_5C_3 + {}_7C_3}{{}_9C_4} &= \frac{1 + 10 + 35}{126} \\ &= \frac{23}{63} \end{aligned}$$

となる。

(iii)  
 $2000 \leq N \leq 2020$  を満たす $N$  は存在しないので、 $1000 \leq N < 2000$  となる場合を考えればよい。これは選んだカードの中に1が含まれるときであるから、1以外のカード3枚の選び方を考えて確率は

$$\frac{{}_8C_3}{{}_9C_4} = \frac{4}{9}$$

となる。

(iv)  
 $N$  が偶数となる事象を $A$ 、 $N$  が3000以上となる事象を $B$ として $A \cap B$ となる場合を考える。 $3000 \leq N$ において、 $N$  が偶数となるとき(ii)より一の位としては4, 6, 8が考えられる。また、千の位の数3以上でなくてはいけないことに注意すると、考えられる $N$ の形として「3□□6」、「3□□8」、「4□□8」、「5□□8」の4通りが考えられる。

- [1] 「3□□6」となるとき  
 $N=3456$ の1通りがある。
- [2] 「3□□8」となるとき  
4から7の中で2枚選べば良いので  
 ${}_4C_2=6$   
通りある。
- [3] 「4□□8」となるとき  
5から7の中で2枚選べば良いので  
 ${}_3C_2=3$   
通りある。
- [4] 「5□□8」となるとき  
 $N=5678$ の1通りがある。

以上[1]から[4]より、事象 $A$ と $B$ が共に起きる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = \frac{1+6+3+1}{{}_9C_4} = \frac{11}{126}$$

となる。これと(2)(ii)を合わせて求める条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{11}{126} \cdot \frac{63}{23} \\ &= \frac{11}{46} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ |
| 5 | 3 | 2 | 1 |
| オ | カ | キ | ク |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| ケ | コ | サ | シ |
| 2 | 3 | 2 | 2 |
| ス | セ | ソ | タ |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| チ | ツ | テ |   |
| 4 | 2 | 8 |   |

〔解説〕

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①に  $n=1$  を代入して

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \cdot a_1 + 2^1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。①の両辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{3}{2} b_n + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= \frac{3}{2} (b_n + 1) \end{aligned}$$

を得る。さらに  $c_n = b_n + 1$  とすることで

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{3}{2} c_n \\ \Leftrightarrow c_n &= c_1 \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 + 1 \left( = \frac{a_1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} c_n &= \left( \frac{3}{2} \right)^n \\ \Leftrightarrow b_n + 1 &= \left( \frac{3}{2} \right)^n \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} &= \left( \frac{3}{2} \right)^n - 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= 3^n - 2^n \end{aligned}$$

と求まる。これを用いて

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (3^k - 2^k) \\ &= 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (3^{n+1} - 2^{n+2} + 1) \end{aligned}$$

となる。よって以上の結果を用いて

$$\begin{aligned} 4a_n - 2S_n + 1 &= 4(3^n - 2^n) - 2 \cdot \frac{1}{2} (3^{n+1} - 2^{n+2} + 1) + 1 \\ &= 3^n \end{aligned}$$

となる。これが14桁の数になるので

$$\begin{aligned} 10^{13} &\leq 3^n < 10^{14} \\ \Leftrightarrow 13 &\leq \log_{10} 3^n < 14 \\ \Leftrightarrow \frac{13}{\log_{10} 3} &\leq n < \frac{14}{\log_{10} 3} \end{aligned}$$

となる。  $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$  であるから

$$\begin{aligned} 27.08 &< \frac{13}{0.48} < \frac{13}{\log_{10} 3} < \frac{13}{0.47} < 27.66 \\ 29.16 &< \frac{14}{0.48} < \frac{14}{\log_{10} 3} < \frac{14}{0.47} < 29.79 \end{aligned}$$

である。よって、 $n$  が整数であることに注意すれば、求める最小の  $n$  は28となる。

〔V〕

〔解答〕

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ |
| 4 | 3 | 8 | 6 |
| オ | カ | キ | ク |
| 4 | 8 | 6 | － |
| ケ | コ | サ | シ |
| 2 | 3 | 0 | 4 |
| ス | セ | ソ | タ |
| 2 | 1 | 1 | 2 |

〔解説〕

$$\int_{-2}^x f(t) dt = x^3 + ax^2 + 6x + a \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

において、 $x = -2$  とすると

$$\begin{aligned} 0 &= -8 + 4a - 12 + a \\ \Leftrightarrow a &= 4 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入し両辺を  $x$  で微分することで

$$f(x) = 3x^2 + 8x + 6$$

を得る。また  $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  について  $f'(x) = 6x + 8$  より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} g(-1) = f(-1) \\ g(0) = f(0) \\ g'(0) = f'(0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -1 + b - c + d = 1 \\ d = 6 \\ c = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b = 4 \\ c = 8 \\ b = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

と求まるので

$$g(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 6$$

となり

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= (x^3 + 4x^2 + 8x + 6) - (3x^2 + 8x + 6) \\ &= x^3 + x^2 \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow h'(x) &= x(3x + 2) \end{aligned}$$

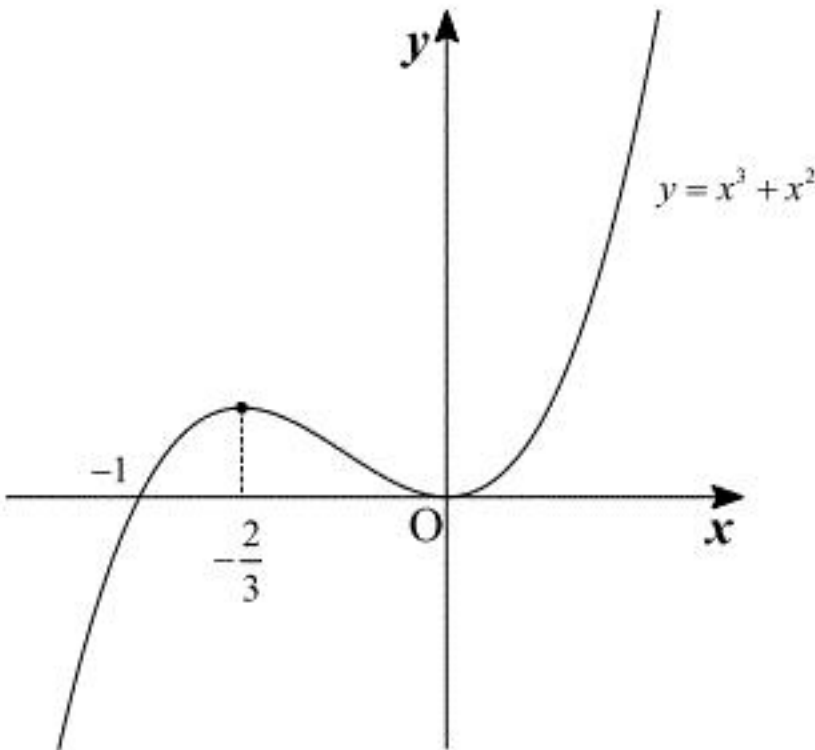
から

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3}, 0 \end{aligned}$$

となる。これより  $h(x)$  の増減表を書くと、以下のようになる。

|         |          |                |          |    |          |
|---------|----------|----------------|----------|----|----------|
| $x$     | $\cdots$ | $-\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | 0  | $\cdots$ |
| $h'(x)$ | +        | 0              | －        | 0  | +        |
| $h(x)$  | ↗        | 極大             | ↘        | 極小 | ↗        |

よって、 $h(0)$  は極小値であるが最小値ではないと言える。グラフは以下のようになる。



よって、 $C$  と  $x$  軸との共有点は 2 個である。これより囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 h(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅵ】

【解答】

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ |
| 9 | 4 | 8 | 6 |
| オ | カ | キ | ク |
| 2 | － | 4 | 6 |
| ケ | コ | サ | シ |
| 1 | 2 | 0 | 3 |
| ス | セ | ソ | タ |
| 2 | 2 | 6 | 5 |
| チ |   |   |   |
| 0 |   |   |   |

【解説】

$x \geq 0$  のとき

$$x \leq \sqrt{x^2+4x}+x$$

であり、このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

であるから、追い出しの原理を利用して

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2+4x}+x \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

となる。また

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x}-x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}-x}$$

と変形できる。 $x \leq -4$  のとき

$$\sqrt{x^2} = -x$$

であることに注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}-1} \\ &= \frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1} \end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} &= \frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1} \\ &= \frac{4}{-1-1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。また、 $f(x)$  を  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x}} + 1 \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} + 1 \end{aligned}$$

となり、同様に

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+4x} - (x+2) \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x}}}{x^2+4x} \\ &= \frac{x^2+4x - (x+2)(x+2)}{(x^2+4x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-4}{(x^2+4x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となる。以降、場合分けして  $f(x)$  の増減および  $C$  の凹凸を考える。

(i)  $x > 0$  において

$f'(x) > 0$  かつ  $f''(x) < 0$  がつねに成り立つから  $f(x)$  はつねに増加し、 $C$  は上に凸である。

(ii)  $x \leq -4$  において

$f''(x) < 0$  なので  $f'(x)$  はつねに減少する。また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{-1} + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より  $f'(x) < 0$  かつ  $f''(x) < 0$  がつねに成り立つ。よって  $f(x)$  はつねに減少し、グラフは上に凸となる。

回転体の体積  $V$  について

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-5}^{-4} \left\{ f(x)+2 \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-5}^{-4} \left\{ \sqrt{x^2+4x}+x+2 \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-5}^{-4} \left\{ \left( \sqrt{x^2+4x} \right)^2 + 2(x+2)\sqrt{x^2+4x} + (x+2)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{-5}^{-4} \left\{ 2x^2+8x+4+2(x+2)\sqrt{x^2+4x} \right\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで

$$I = 2 \int_{-5}^{-4} (x+2)\sqrt{x^2+4x} dx$$

について  $x^2+4x=t$  と置換すると

$$\begin{aligned} (2x+4)dx &= dt \\ \Leftrightarrow 2(x+2)dx &= dt \end{aligned}$$

となる。ここで

|     |      |               |      |
|-----|------|---------------|------|
| $x$ | $-5$ | $\rightarrow$ | $-4$ |
| $t$ | $5$  | $\rightarrow$ | $0$  |

に注意すれば

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-5}^{-4} (x+2)\sqrt{x^2+4x} dx \\ &= \int_5^0 \sqrt{t} dt \\ &= \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_5^0 \\ &= \frac{2}{3} (0-5\sqrt{5}) \\ &= -\frac{10}{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-5}^{-4} \left\{ 2x^2+8x+4+2(x+2)\sqrt{x^2+4x} \right\} dx \\ &= \pi \left\{ \int_{-5}^{-4} (2x^2+8x+4) dx + I \right\} \\ &= \pi \left\{ \left[ \frac{2}{3} x^3+4x^2+4x \right]_{-5}^{-4} + I \right\} \\ &= \left\{ \frac{26}{3} + I \right\} \pi \end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅶ】

【解答】

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ |
|     | 7 | 1 | 0 | 4 |
| (2) | オ | カ | キ | ク |
|     | 2 | 8 | 4 | 4 |
|     | ケ | コ | サ | シ |
|     | 6 | 4 | 2 | 0 |
|     | ス | セ | ソ | タ |
|     | 1 | 2 | 2 | 3 |
|     | チ | ツ |   |   |
|     | 2 | 5 |   |   |

【解説】

(1)

$t > 0$  のとき

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)' \\ &= \frac{t}{t^2+1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \frac{t^2-1}{t^3+t} \\ &= \frac{(t-1)(t+1)}{t(t^2+1)} \end{aligned}$$

である。このとき増減表は

|         |            |            |    |            |
|---------|------------|------------|----|------------|
| $t$     | (0)        | ...        | 1  | ...        |
| $f'(t)$ | $\nearrow$ | -          |    | +          |
| $f(t)$  | $\nearrow$ | $\searrow$ | 最小 | $\nearrow$ |

より  $t=1$  において最小とり、最小値は

$$\begin{aligned} f(1) &= \log\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また増減表より  $t > 1$  において、 $f(t)$  はつねに増加する。

(2)

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=t^2 \end{cases}$$

についてそれぞれの式の両辺を  $t$  で微分すると

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{t^3+t} \\ \frac{dy}{dt} = 2t \end{cases}$$

となり、これより

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= 2t \cdot \frac{t^3+t}{t^2-1} \\ &= \frac{2t^4+2t^2}{t^2-1} \end{aligned}$$

を得る。この両辺を再度  $t$  で微分することで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{(8t^3+4t)(t^2-1)-(2t^4+2t^2) \cdot 2t}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{4t^5-8t^3-4t}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{4t(t^4-2t^2-1)}{(t^2-1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2-1)^2} \{t^2-(1+\sqrt{2})\} \{t^2-(1-\sqrt{2})\} \\ &= \frac{4t}{(t^2-1)^2} \left\{t-\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\right\} \left\{t+\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\right\} \{t^2-(1-\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

を得る。ここで  $t > 1$  なので、 $\frac{4t}{(t^2-1)^2} > 0$ 、 $t^2-(1-\sqrt{2}) > 0$  が成り立つ。これより  $\frac{dy}{dx}$  の増減

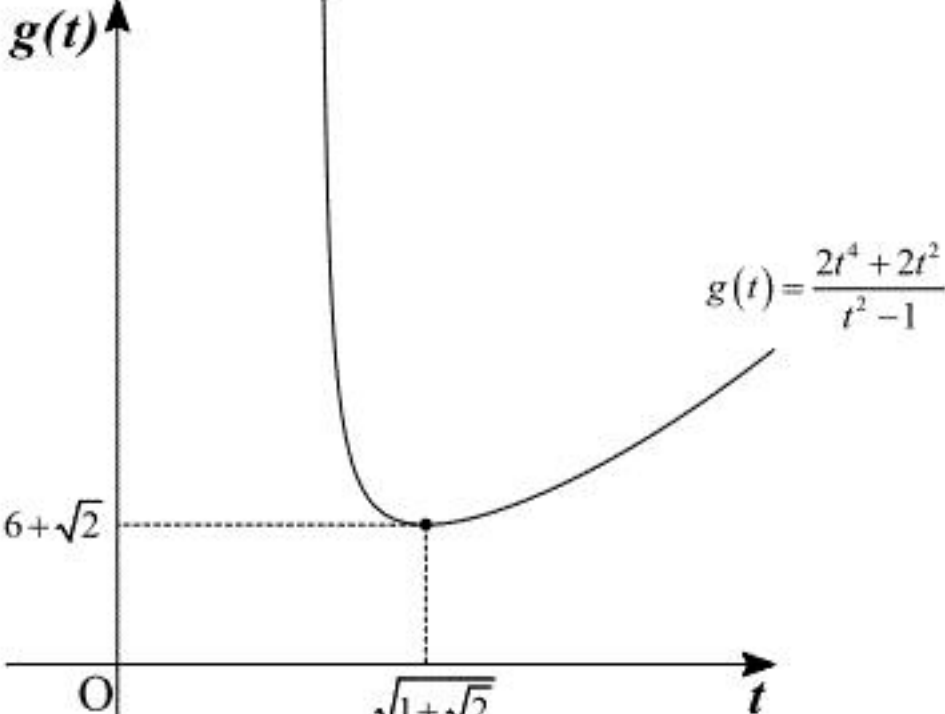
を考えると

|                                          |             |            |                     |            |
|------------------------------------------|-------------|------------|---------------------|------------|
| $t$                                      | (1)         | ...        | $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ | ...        |
| $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ |             | -          | 0                   | +          |
| $\frac{dy}{dx}$                          | $(+\infty)$ | $\searrow$ | 最小                  | $\nearrow$ |

となる。よって  $t$  の傾きの最小値は  $t=\sqrt{1+\sqrt{2}}$  のときで

$$\frac{2(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})-1}=6+4\sqrt{2}$$

となる。また増減表より  $g(t)=\frac{dy}{dx}$  のグラフは下のようになる。



よって、 $\frac{dy}{dx}=k$  となる  $t$  の値の個数  $n$  は

$$k < 6+\sqrt{2} \text{ のとき, } n=0$$

$$k = 6+\sqrt{2} \text{ のとき, } n=1$$

$$k > 6+\sqrt{2} \text{ のとき, } n=2$$

である。また  $\frac{dy}{dx}=12$  となるのは

$$\begin{aligned} \frac{2t^4+2t}{t^2-1} &= 12 \\ \Leftrightarrow 2t^4+2t^2 &= 12t^2-12 \\ \Leftrightarrow t^4-5t^2+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2-2)(t^2-3) &= 0 \\ \therefore t^2 &= 2, 3 \end{aligned}$$

より  $t > 1$  に注意して

$$t=\sqrt{2}, \sqrt{3}$$

となる。次に  $S$  について

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{t^2-1}{t^3+t} \\ \Leftrightarrow dx &= \frac{t^2-1}{t^3+t} dt \end{aligned}$$

を用いて置換積分を行う。このとき

$$\begin{cases} a=f(\sqrt{2}) \\ b=f(\sqrt{3}) \end{cases}$$

であるから

|     |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| $x$ | $f(\sqrt{2})$ | $\rightarrow$ | $f(\sqrt{3})$ |
| $t$ | $\sqrt{2}$    | $\rightarrow$ | $\sqrt{3}$    |

より

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b y dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 \cdot \frac{t^2-1}{t^3+t} dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^3-t}{t^2+1} dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{2t}{t^2+1}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \log(t^2+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \log\frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求まる。