

【1】

1回目のじゃんけんをする前に空席であった椅子を X とする。また、 A, B はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すので、 A, B の手の出し方は全部で $3 \cdot 3 = 9$ 通りあり、どの出し方も同様に確からしい。よって、 A が勝つ確率は、 A の手の出し方が3通りなので $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 、 B が勝つ確率は同様に $\frac{1}{3}$ 、あいこの確率は $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$ である。これより、じゃんけんを1回行うたびに、 A が席を移動する確率は $\frac{2}{3}$ 、 B が席を移動する確率は $\frac{1}{3}$ である。

(1)

じゃんけんの結果にかかわらず、じゃんけんを1回行うたびに A, B いずれか一方の席の移動が起こる。したがって、1回目のじゃんけんのあとには A, B いずれかが X に移動しているので、

$$c_1 = 0$$

となる。また、2回目のじゃんけんのあとに X が空席である事象は

1, 2回目ともに A が席を移動する場合

1, 2回目ともに B が席を移動する場合

の2通りのみであるので、

$$c_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_1 = 0, c_2 = \frac{5}{9}$$

(2)

n を自然数として $n+1$ 回目のじゃんけんの後に A が X に座っている事象は「 n 回目のじゃんけんの後に A, B ともに X には座っておらず、 $n+1$ 回目のじゃんけんの結果 A が X に移動した場合」、「 n 回目のじゃんけんの後に A は X に座っており、 $n+1$ 回目のじゃんけんの結果 B が席を移動した場合」の2通りのみである。よって、

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n$$

となる。同様に、

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n, b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$$

(3)

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

と(2)の結果より、すべての自然数 n において

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= 1 - (a_{n+2} + b_{n+2}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \right) \\ &= \frac{5}{9}c_n + \frac{2}{9}(a_n + b_n) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{3}c_n \end{aligned}$$

であるので、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{2}{9} + \frac{1}{3}c_n \\ \Leftrightarrow c_{n+2} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \left(c_n - \frac{1}{3} \right) \\ \Leftrightarrow c_n &= \begin{cases} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(c_1 - \frac{1}{3} \right) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(c_2 - \frac{1}{3} \right) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \\ \therefore c_n &= \begin{cases} \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}+1} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}+1} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

〔Ⅱ〕

(1)

方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ が $x = i$ を解にもつとき、

$$i^3 + ai^2 + bi - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a - 3 + i(-1 + b) = 0$$

となる。 a, b は実数なので、係数を比較して

$$\begin{cases} -a - 3 = 0 \\ -1 + b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -3, b = 1$$

である。

(答) $a = -3, b = 1$

(2)

(1)の結果より、方程式の解は

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = \pm i, 3$$

である。

(答) $x = -i, 3$

(3)

方程式が $x = 1$ を解にもつとき、

$$1 + a + b - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2 - a$$

であるから、方程式の解は

$$x^3 + ax^2 + (2 - a)x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\{x^2 + (a + 1)x + 3\} = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{-a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 11}}{2}$$

である。

(答) $x = \frac{-a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 11}}{2}$

(4)

(3)の結果より、方程式が $x = 1$ を解にもつとき、他の解が虚数解であるのは

$$a^2 + 2a - 11 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{3} < a < -1 + 2\sqrt{3}$$

$$\therefore 3 - 2\sqrt{3} < b < 3 + 2\sqrt{3} \quad (\because b = 2 - a)$$

となるときである。

(答) $3 - 2\sqrt{3} < b < 3 + 2\sqrt{3}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 - 4x + 9 \\ &= 2(x-1)^2 + 7 \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ は $x=1$ で最小値 7 をとる。

(答) 7

(2)

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + (a-9)x + 12 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^2 + 4x + a - 9 \\ &= -2(x-1)^2 + a - 7 \end{aligned}$$

であるから、 $0 < a < 7$ のとき $f'(x)$ は常に負である。したがって $f(x)$ は単調減少であり、

$0 \leq x \leq 2$ における最大値は $f(0)=12$ 、最小値は $f(2)=2a-\frac{10}{3}$ となる。

(答) 最大値：12、最小値： $2a-\frac{10}{3}$

(3)

(2)の結果より、

$$2a - \frac{10}{3} \geq \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{34}{15} \leq a$$

となる。よって $0 < a < 7$ であるから、定数 a の最小値は $\frac{34}{15}$ である。

(答) $\frac{34}{15}$

(4)

$a=8$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x + 12 \\ f'(x) &= -2x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって

$$\begin{aligned} f(0) &= 12 \\ f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{37-\sqrt{2}}{3} \\ f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{37+\sqrt{2}}{3} \\ f(2) &= \frac{38}{3} \end{aligned}$$

より $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値は $\frac{37+\sqrt{2}}{3}$ 、最小値は $\frac{37-\sqrt{2}}{3}$ である。

(答) 最大値： $\frac{37+\sqrt{2}}{3}$ 、最小値： $\frac{37-\sqrt{2}}{3}$