

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ		
	①	⑤	②	③	⑦	④		
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	－	3	5	－	1	－	1	5
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト		
	5	1	9	2	5	4		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \{(a+b)+c\}^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

より、

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

が成立するから、 $P=a+b+c$ 、 $Q=2(ab+bc+ca)$ となる。また、

$$(x+y)^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

と因数分解できる。さらに、

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)\end{aligned}$$

より $R=3(a+b+c)$ となる。また、

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \{(a+b)+c\} \{(a+b)^2 - (a+b) \cdot c + c^2\} - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c) \{a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)\}\end{aligned}$$

と因数分解できるから、 $S=a^2+b^2+c^2$ 、 $T=ab+bc+ca$ となる。

(2)

$x=2+i$ 、 $2-i$ が3次方程式①の解であるから、残りの1つの解を γ と置くと、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} -a = (2+i) + (2-i) + \gamma \\ 1 = (2+i)(2-i) + (2+i)\gamma + (2-i)\gamma \\ -b = (2+i)(2-i)\gamma \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 - \gamma \\ 1 = 5 + 4\gamma \\ b = -5\gamma \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \gamma = -1 \\ b = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{1}{-b} \\ &= -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

と計算される。

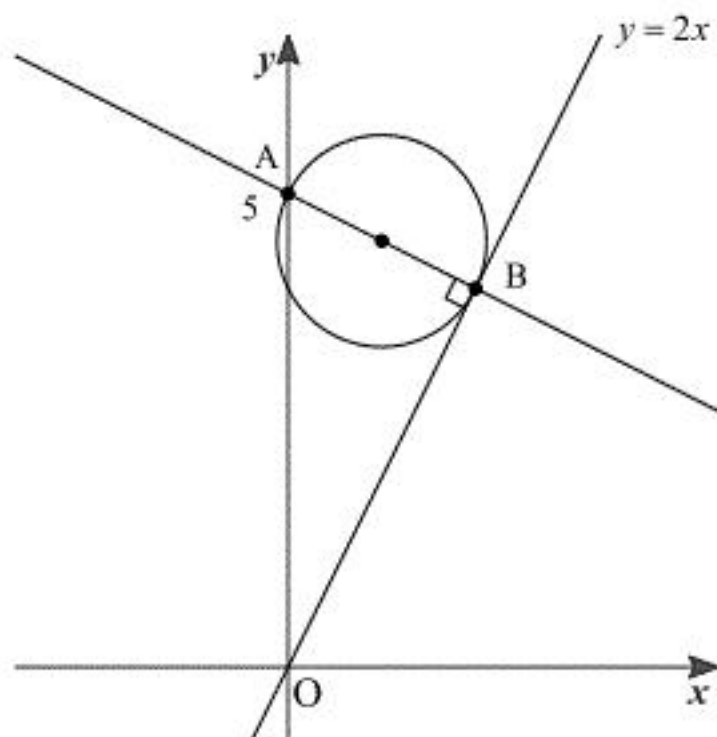
(3)

直線 ℓ : $2x-y=0$ および点A(0, 5)に対して点と直線の距離の公式を用いると、距離は

$$\frac{|2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

と計算できる。ここで、点Aを通り、 ℓ と接する半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ の円を考えると、円の直径と点A

と直線 ℓ との距離が等しいから、下図のように、点Aから直線 ℓ におろした垂線上に円の中心がくる。



ここで、直線 ℓ の傾きが2であるから、垂線の傾きは $-\frac{1}{2}$ となり、A(0, 5)を通ることから、

垂線の方程式は、

$$\begin{aligned}y-5 &= -\frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x+5\end{aligned}$$

である。したがって、垂線の足をBとすると、Bの座標は、

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x+5 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 4)$$

となる。題意の円の中心は、2点A(0, 5)、B(2, 4)を結ぶ線分の中点であるから、

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right)$$

である。以上より、求める円の方程式は、

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

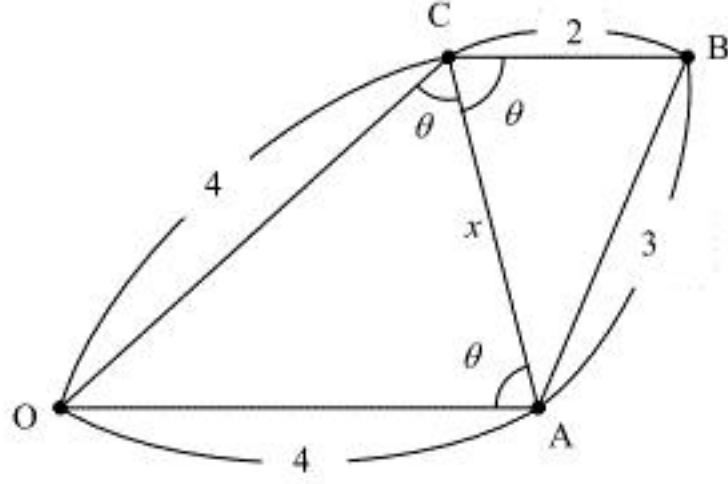
である。

【II】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	5	1	0	1	0	8	9	1	5
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
4	5	1	1	1	2	3	1	2	2
ナ	ニ	ヌ							
6	1	1							

【解説】



OA = OC より $\angle OAC = \angle OCA = \theta$ である。OA と BC が平行であるから、平行線の錯角の関係より、 $\angle OAC = \angle ACB = \theta$ である。次に、三角形 ABC において余弦定理を用いると、

$$3^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x \cos \theta - 5 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。また、三角形 OAC は二等辺三角形であるから、

$$4 \cos \theta = x \cdot \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、①、②より、

$$\begin{cases} x^2 - 4x \cos \theta - 5 = 0 \\ 4 \cos \theta = x \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \cdot \frac{x}{2} - 5 = 0 \\ 4 \cos \theta = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 10 \\ \cos \theta = \frac{x}{8} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \sqrt{10} \ (\because x > 0) \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{8} \end{cases}$$

が得られる。ここで台形 OABC の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \cdot (OA + BC) \cdot AC \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{10} \cdot \sin \theta$$

$$= 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \ (\because 0 < \theta < \pi)$$

$$= 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2}$$

$$= 3\sqrt{10} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$= \frac{9\sqrt{15}}{4}$$

である。次に、

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle OAC$$

$$= 4 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{8}$$

$$= 5$$

であり、また、

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 11$$

である。さらに、

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{OA}|} \overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

であり、両辺の絶対値を 2 乗することで、

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \right|^2$$

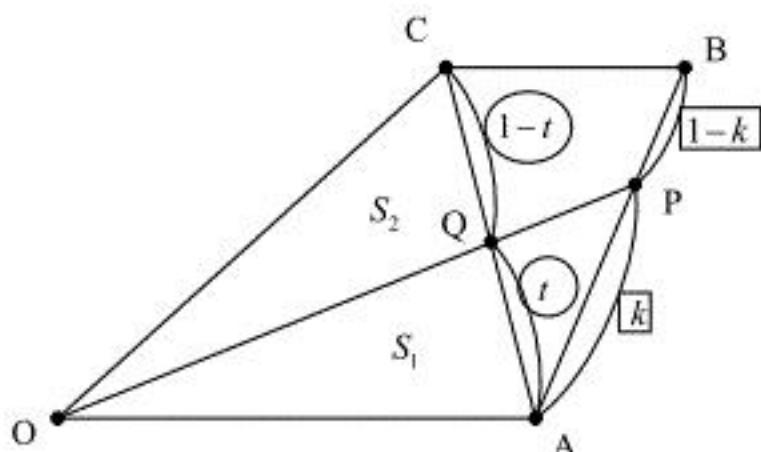
$$= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4^2 + 11 + 4^2$$

$$= 31$$

$$\therefore OB = \sqrt{31}$$

と計算できる。



次に、点 P は線分 AB を $k:(1-k)$ に内分するから、

$$\overrightarrow{OP} = (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB}$$

$$= (1-k) \cdot \overrightarrow{OA} + k \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}k \right) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OC}$$

と表すことができ、点 Q は線分 AC を $t:(1-t)$ に内分するから、

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OC}$$

と表せる。点 O、点 P、点 Q は一直線上に存在するので、

$$1-t:t = 1 - \frac{1}{2}k:k$$

$$\Leftrightarrow (1-t) \cdot k = t \cdot \left(1 - \frac{1}{2}k \right)$$

$$\Leftrightarrow k = t \cdot \left(1 + \frac{1}{2}k \right)$$

$$\therefore t = \frac{2k}{2+k} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。また、 $S_1:S_2 = 1:5$ より、

$$AQ:QC = 1:5$$

$$\Leftrightarrow t:1-t = 1:5$$

となるから、

$$1 \cdot (1-t) = 5t$$

$$\therefore t = \frac{1}{6}$$

であり、③に代入することで、

$$\frac{1}{6} = \frac{2k}{2+k}$$

$$\therefore k = \frac{2}{11}$$

が得られる。以上より、

$$AP = 3k$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{11}$$

$$= \frac{6}{11}$$

となる。

【III】

〔解答〕

(1)	ア	イ							
	3	7							
(2)	ウ	エ							
	3	7							
(3)	オ	カ	キ	ク					
	1	9	4	3					
(4)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ			
	②	①	3	7	4	7			
(5)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
	4	7	1	7	1	2	1	7	④

〔解説〕

(1)

7つの玉のいずれも同様に確からしく引かれるものとする。 a_1 が偶数となるのは、1回取り出したときに、7つの玉のうち偶数である2, 4, 6のいずれかを取り出すときだから、求める確率は $\frac{3}{7}$ である。

(2)

2回取り出すとき、すべての取り出し方は 7^2 通りである。ここで、 $a_1 < a_2$ となる取り出し方の総数は7つの番号から2つの番号を選ぶときの選び方の総数に等しく、 ${}_7C_2$ と表される。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_2}{7^2} = \frac{1}{7^2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

である。

(3)

$a_1 + a_2 \leq 4$ となる取り出し方は、 $(a_1, a_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ の6通りである。したがって、 $a_1 + a_2 \geq 5$ となる取り出し方は $7^2 - 6 = 43$ 通りとなる。ここで、 $a_1 + a_2 \leq 4$ となる取り出し方のうち $a_1 < a_2$ となるものは $(1, 2), (1, 3)$ の2通りであるから、 $a_1 + a_2 \geq 5$ となる取り出し方のうち $a_1 < a_2$ となるのは ${}_7C_2 - 2$ 通りである。以上より、求める条件付き確率は、

$$\frac{{}_7C_2 - 2}{43} = \frac{19}{43}$$

となる。

(4)

$a_1 + a_2$ が偶数となるのは、
 a_1 が偶数であり、かつ a_2 が偶数であるとき
 または
 a_1 が奇数であり、かつ a_2 が奇数であるとき

である。したがって、 $a_1 + a_2$ が偶数となる確率は、(1)より、

$$\begin{aligned} & \frac{3}{7}p_1 + \left(1 - \frac{3}{7}\right)(1 - p_1) \\ &= \frac{3}{7}p_1 + \frac{4}{7}(1 - p_1) \end{aligned}$$

と表される。

(5)

(4)と同様にして考えると、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{3}{7}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n) \\ \Leftrightarrow p_{n+1} &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n \end{aligned}$$

が得られ、初項は $p_1 = \frac{3}{7}$ である。ここで

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7}p_n \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{7}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

と変形でき、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{14}$ で公比 $-\frac{1}{7}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
6	9	5	4	6	2	7	②	④	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
⊖	⑦	①	⊖	2	1	6			

【解説】

$y=f(x)$ は 2 点 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ を通るから、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (-3)^3 - a(-3)^2 - b(-3) + c = 0 \\ 3^3 - a \cdot 3^2 - b \cdot 3 + c = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -27 - 9a + 3b + c = 0 \\ 27 - 9a - 3b + c = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -27 - 9a + 3b + c = 0 \\ -54 + 6b = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - c = 0 \\ b = 9 \end{cases} \qquad \cdots (i) \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 9$ となるから、点 B における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + 0 \\ &\Leftrightarrow y = (18-6a)(x-3) \end{aligned}$$

である。この接線が点 $(0, c)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} c &= (18-6a)(0-3) \\ &\Leftrightarrow 18a - c - 54 = 0 \qquad \cdots (ii) \end{aligned}$$

を満たす。したがって、(i), (ii)より、

$$\begin{cases} 9a - c = 0 \\ 18a - c - 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, c) = (6, 54)$$

である。また、 $f(x) = 0$ は $x = 3, -3$ を解にもつから $f(x)$ は $(x-3)(x+3)$ を因数にもち、

$$f(x) = (x-3)(x+3)(x-6)$$

と変形できる。したがって、 $f(x) = 0$ の解は $x = -3, 3, 6$ であり、最大のものは $x = 6$ である。

次に、 $f'(x) = 3x^2 - 12x - 9$ と表され、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \\ \therefore x &= 2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

から、 $f'(x) = 3\{x - (2 - \sqrt{7})\}\{x - (2 + \sqrt{7})\}$ より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$2 - \sqrt{7}$	...	$2 + \sqrt{7}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

3 次関数の値域はすべての実数をとるから、増減表より、 $f(2 - \sqrt{7})$ は極大値であるが、最大

値ではなく、 $f(2 + \sqrt{7})$ は極小値であるが、最小値ではない。次に、 $f(x)$ を

$$\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 4x - 3 \text{ で割ると、}$$

$$f(x) = (x^2 - 4x - 3)(x - 2) - 14x + 48$$

となるから、商は $x - 2$ 、余りは $-14x + 48$ となる。よって、

$$f(x) = \{x - (2 - \sqrt{7})\}\{x - (2 + \sqrt{7})\}(x - 2) - 14x + 48$$

より、

$$\begin{aligned} f(2 - \sqrt{7}) &= -14(2 - \sqrt{7}) + 48 \\ &= 20 + 14\sqrt{7} \end{aligned}$$

と計算できる。最後に、 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$ において、積分区間の y 軸対称性から、

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^3 (x^3 - 6x^2 - 9x + 54) dx \\ &= 2 \int_0^3 (-6x^2 + 54) dx \\ &= 2 \left[-2x^3 + 54x \right]_0^3 \\ &= 2 \cdot (-2 \cdot 3^3 + 54 \cdot 3) \\ &= 216 \end{aligned}$$

と計算できる。

【V】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ				
	2	1	4	⊖	⑤				
(2)	カ	キ	ク						
	⊖	⑤	①						
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	2	1	2	2	2	2	3	1	2

【解説】

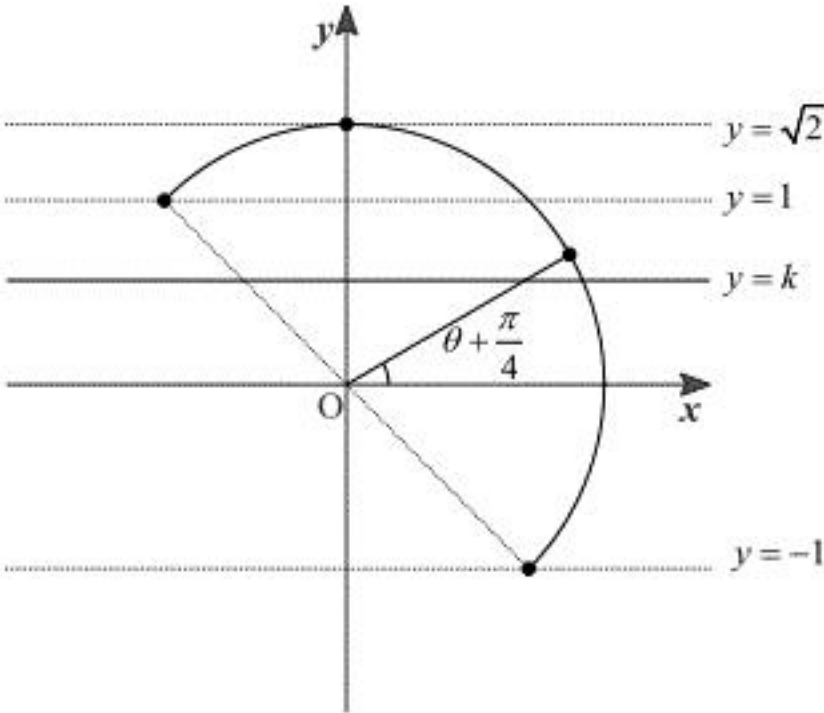
(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

と合成することができ。ここで、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから、 $\sin \theta + \cos \theta$ の最小値は -1 、最大値は $\sqrt{2}$ となる。

(2)

$\sin \theta + \cos \theta = k$ の $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における解の個数 n は、下図の円弧と $y = k$ のグラフの交点の個数に一致する。



したがって、上図より、

$$n = 0 \text{ となるのは } k < -1, \sqrt{2} < k \text{ のとき}$$

$$n = 1 \text{ となるのは } -1 \leq k < 1, k = \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$n = 2 \text{ となるのは } 1 \leq k < \sqrt{2} \text{ のとき}$$

である。

(3)

$\sin \theta + \cos \theta = t$ について、(2)より $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ であり、両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= t^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= t^2 \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{t^2 - 1}{2} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \end{aligned}$$

が得られるから、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + 2(\sin \theta + \cos \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2t - 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \\ &= -t^2 + 2t + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(\theta) = -(t - 1)^2 + 3$$

として、 t を用いて表すことができる。 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ より $t = 1$ で最大値3をとることがわかる。このときの θ は、 $t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ から、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ より、

$$\begin{aligned} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} &= \frac{3}{4}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

となる。

[VI]

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
㊟	㊿	㊽	2	4	－	3	1	④	②
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
⑤	⑧	⑨	0	2	5	2	3		

[解説]

$f(x)=\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x}+3$ ($x\neq 0, x\neq 3$) より、 $f(x)=3$ となる x は

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{x-3}-\frac{1}{x}+3 &= 3 \\ \Leftrightarrow 4x &= x-3 \text{ かつ } x\neq 0 \text{ かつ } x\neq 3 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=3, \lim_{x\rightarrow+0} f(x)=-\infty$$

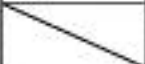
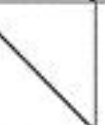
である。 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{(x-3)^2}+\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(x-3)^2-4x^2}{\{x(x-3)\}^2} \\ &= \frac{(x-3+2x)(x-3-2x)}{\{x(x-3)\}^2} \\ &= \frac{-3(x+3)(x-1)}{\{x(x-3)\}^2} \end{aligned}$$

であるから、 $f'(x)=0$ となるのは、 $x=-3, 1$ のときである。ここで、

$$\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=3, \lim_{x\rightarrow-0} f(x)=\infty, \lim_{x\rightarrow3-0} f(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow3+0} f(x)=\infty$$

と、 $f(-3)=\frac{8}{3}, f(1)=0$ をふまえて $f(x)$ の増減表を書くと、以下のようになる。

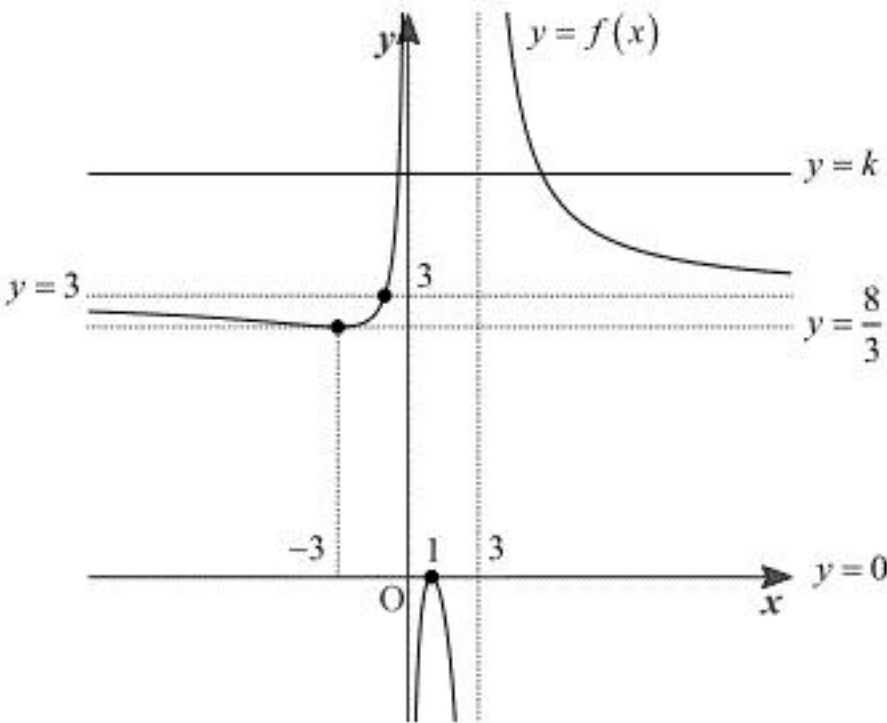
x	$(-\infty)$	...	-3	...	(0)	...	1	...	(3)	...	(∞)
$f'(x)$		－	0	＋		＋	0	－		－	
$f(x)$	(3)		$\frac{8}{3}$				0				(3)

増減表より、 $y=f(x)$ のグラフを書くとき以下のようになり、

$f(-3)$ は、 $f(x)$ の極小値であるが、最小値ではない

$f(1)$ は、 $f(x)$ の極大値であるが、最大値ではない

といえる。また、 $f(x)=k$ の実数解の個数 n は、 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の交点の個数に一致する。



上図より、 $n=1$ となる k の値は、小さい順に $0, \frac{8}{3}, 3$ である。また、 $0 < k < \frac{8}{3}$ のとき、 $n=0$ で

あり、 $\frac{8}{3} < k < 3$ のとき、 $n=2$ である。最後に、 $y=f(x)$ と x 軸、 $x=1, x=2$ で囲まれた領域

は、 x 軸の下側に存在するから、その面積は

$$\begin{aligned} -\int_1^2 f(x)dx &= \int_2^1 \left(\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x}+3 \right) dx \\ &= \left[4\log|x-3|-\log|x|+3x \right]_2^1 \\ &= 5\log 2-3 \end{aligned}$$

と計算できる。

【VII】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
⑥	⑥	④	①	2	3	5	2	2	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
③	①	④	②	⑧	②	2	1	2	

【解説】

$f(x)=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$ について、

$$\begin{aligned}f(0)&=e^{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=e^{-1}\end{aligned}$$

であり、導関数は、

$$f'(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

となる。また、 $e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$ はつねに正の値をとる。このとき、 $0\leq x\leq 2\pi$ において、 $\frac{\pi}{6}\leq$

$x+\frac{\pi}{6}\leq \frac{13}{6}\pi$ であるから、 $f'(x)=0$ の解は、

$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\&\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=0\\&\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\quad\left(\because e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}>0\right)\\&\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\\&\therefore x=\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

である。さらに、 $f(x)$ の第2次導関数は、

$$\begin{aligned}f''(x)&=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}+2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&=2e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\left\{2-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\left(\because \cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

と計算できる。ここで、

$$\begin{aligned}f''(0)&=2e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}=4e^{-1}>0\\f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)&=2e^{2\cdot 1}\left(2-1-2\cdot 1^2\right)=-2e^2<0\\f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)&=2e^{2(-1)}\left\{2-(-1)-2(-1)^2\right\}=2e^{-2}>0\end{aligned}$$

であり、区間 $0\leq x\leq \frac{2}{3}\pi$ 、 $\frac{2}{3}\pi\leq x\leq \frac{5}{3}\pi$ において関数 $f''(x)$ は連続であるから、中間値の定

理により、 $f''(x)=0$ の解は、 $0< x< \frac{2}{3}\pi$ と $\frac{2}{3}\pi< x< \frac{5}{3}\pi$ のそれぞれの区間に少なくとも1つずつ存在する。ここで題意より、 $0\leq x\leq 2\pi$ において $f''(x)=0$ は解をちょうど2つ持つことから、 $0< x< \frac{2}{3}\pi$ と $\frac{2}{3}\pi< x< \frac{5}{3}\pi$ のそれぞれに $f''(x)=0$ の2解が1つずつ存在することがわかる。したがって、 $f''(x)=0$ の2解 α, β ($0\leq \alpha< \beta\leq 2\pi$)について、

$$\alpha<\frac{2}{3}\pi<\beta<\frac{5}{3}\pi$$

が成り立つ。これをもとに $f(x)$ の増減表を書くと、以下のようになる。

x	0	…	α	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	β	…	$\frac{5}{3}\pi$	…	2π
$f'(x)$		+	+	+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	e^{-1}	↗	$f(\alpha)$	↗	e^2	↘	$f(\beta)$	↘	e^{-2}	↗	e^{-1}

これより、 $\frac{2}{3}\pi< x< \frac{5}{3}\pi$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、変曲点をちょうど1つもつ。また、

$\frac{5}{3}\pi< x< 2\pi$ において、 $f(x)$ はつねに増加し、 C は下に凸である。次に、定積分

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$ について、 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=t$ とおくと、 $\frac{dt}{dx}=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ となる。さらに、変数は下表のように対応する。

x	0	→	$\frac{\pi}{3}$
t	$-\frac{1}{2}$	→	$\frac{1}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx\\&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{2t}dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\\&=\frac{e^2-1}{2e}\end{aligned}$$

と計算できる。