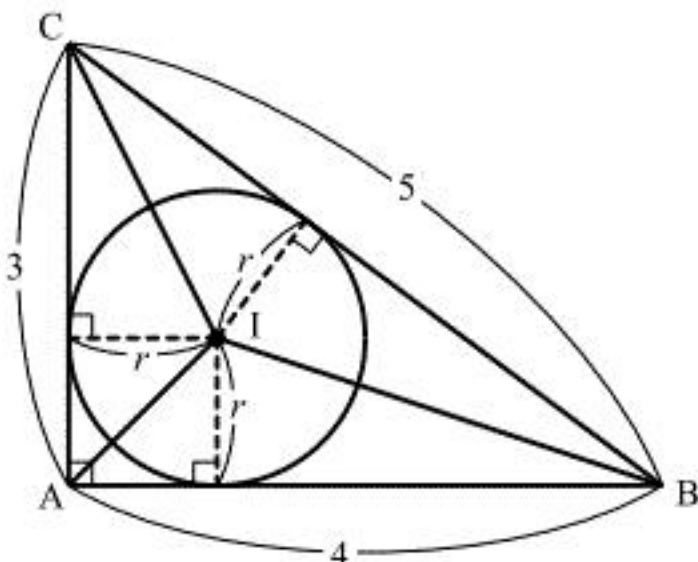


【I】

(1)

まず、 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つから、三角形 ABC は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。ここで、三角形 ABC の内接円の中心を点 I、その半径を r とおくと、以下の図のようになる。



内接円の半径と三角形の面積の関係式より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r(AB + BC + CA) &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r(4 + 5 + 3) &= 6 \\ \therefore r &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) 1

(2)

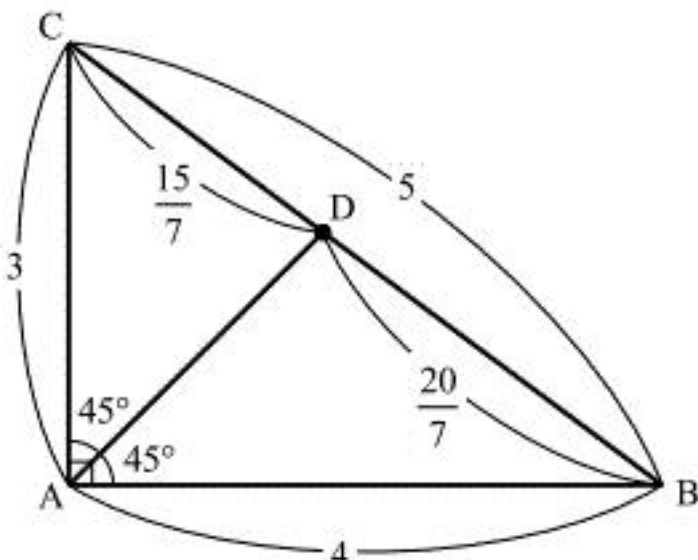
角の二等分線の性質より、

$$BD : DC = AB : AC = 4 : 3$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} BD &= \frac{4}{4+3} BC = \frac{20}{7} \\ DC &= \frac{3}{4+3} BC = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

である。これを踏まえて、以下に三角形 ABC および点 D を図示する。



ここで、

$$\sin \angle DCA = \sin \angle BCA = \frac{4}{5}$$

であるから、 $\triangle ACD$ において正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{AD}{\sin \angle DCA} &= \frac{CD}{\sin \angle CAD} \\ \Leftrightarrow \frac{AD}{\frac{4}{5}} &= \frac{\frac{15}{7}}{\sin 45^\circ} \\ \therefore AD &= \frac{12\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$

(3)

三角形 ABD において、(2)の結果および内接円の半径と面積の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_1(AB + BD + DA) &= \frac{4}{3+4} \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r_1\left(4 + \frac{20}{7} + \frac{12\sqrt{2}}{7}\right) &= \frac{24}{7} \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{4}{4+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

が得られる。また、同様に三角形 ACD において

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_2(AC + CD + DA) &= \frac{3}{3+4} \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r_2\left(3 + \frac{15}{7} + \frac{12\sqrt{2}}{7}\right) &= \frac{18}{7} \\ \Leftrightarrow r_2 &= \frac{3}{3+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2} &= \frac{4}{4+\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{4(3+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}{3(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2(10+\sqrt{2})}{21} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2(10+\sqrt{2})}{21}$

〔Ⅱ〕

(1)

12 個の玉が一行に並んでおり、玉と玉の間を 2 つ選んで仕切りを 1 つずつ立てることを考える。ここで、仕切りで分けられた玉の数を左から順に x, y, z に対応させると、これは $x+y+z=12$ を満たす x, y, z の組である。よって、 x, y, z の組の総数は 11 個の間から 2 個の間を選ぶ場合の数に等しいから、

$${}_{11}C_2 = 55 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 55 通り

(2)

33 を素因数分解すると

$$33 = 3 \cdot 11$$

となる。 $x+y, z$ は自然数であり、 $x+y \geq 2$ に注意すると、

$$(x+y, z) = (33, 1), (11, 3), (3, 11)$$

の場合が考えられる。以下に、各場合の (x, y) の組み合わせの総数を示す。

	(x, y) の組み合わせ
$x+y=33$ のとき	32 通り
$x+y=11$ のとき	10 通り
$x+y=3$ のとき	2 通り

以上より、求める場合の数は

$$32+10+2=44 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 44 通り

(3)

128 を素因数分解すると、

$$128 = 2^7$$

となる。 x, y, z は自然数であるから、これらの素因数は 2 のみとなり、

$$\begin{cases} x = 2^X \\ y = 2^Y \\ z = 2^Z \end{cases}$$

と表せる。ただし、 X, Y, Z は 0 以上の整数である。このとき、

$$xyz = 128$$

$$\Leftrightarrow 2^X \cdot 2^Y \cdot 2^Z = 2^7$$

$$\Leftrightarrow X+Y+Z=7$$

が成り立つ。ここで、7 個の玉と 2 つの仕切りを一行に並べて、仕切りで分けられた玉の数を左から順に X, Y, Z に対応させると、これは $X+Y+Z=7$ を満たす X, Y, Z の組である。よって、 X, Y, Z の組の総数は 7 個の玉と 2 つの仕切りを並べたときの場合の数に等しいから、

$${}_9C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 36 通り

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x)$ を x で微分すると,

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + (3t - 1)$$

となる。ここで,

$$f'(\alpha) = -1$$

$$\Leftrightarrow -3\alpha^2 + 6\alpha + (3t - 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - t = 0$$

であり,

$$f'(\beta) = -1$$

$$\Leftrightarrow -3\beta^2 + 6\beta + (3t - 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - 2\beta - t = 0$$

であるから, α, β は X についての 2 次方程式 $X^2 - 2X - t = 0$ の 2 つの解であることがわかる。

いま, $\beta - \alpha = 4$ より $\beta > \alpha$ であるから,

$$\alpha = 1 - \sqrt{1+t}, \beta = 1 + \sqrt{1+t}$$

が得られる。よって,

$$\beta - \alpha = 4$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{1+t}) - (1 - \sqrt{1+t}) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+t} = 2$$

$$\Leftrightarrow t = 3$$

であり,

$$\alpha = 1 - \sqrt{1+3} = -1$$

$$\beta = 1 + \sqrt{1+3} = 3$$

である。

(答) $\alpha = -1, \beta = 3, t = 3$

(2)

(1)より,

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 8x$$

である。直線 l の方程式は,

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \cdot \{x - (-1)\} - 4$$

$$\Leftrightarrow y = -x - 5$$

である。直線 l と曲線 C の方程式を連立すると, その共有点の座標は

$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 + 8x \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 5 = -x^3 + 3x^2 + 8x \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

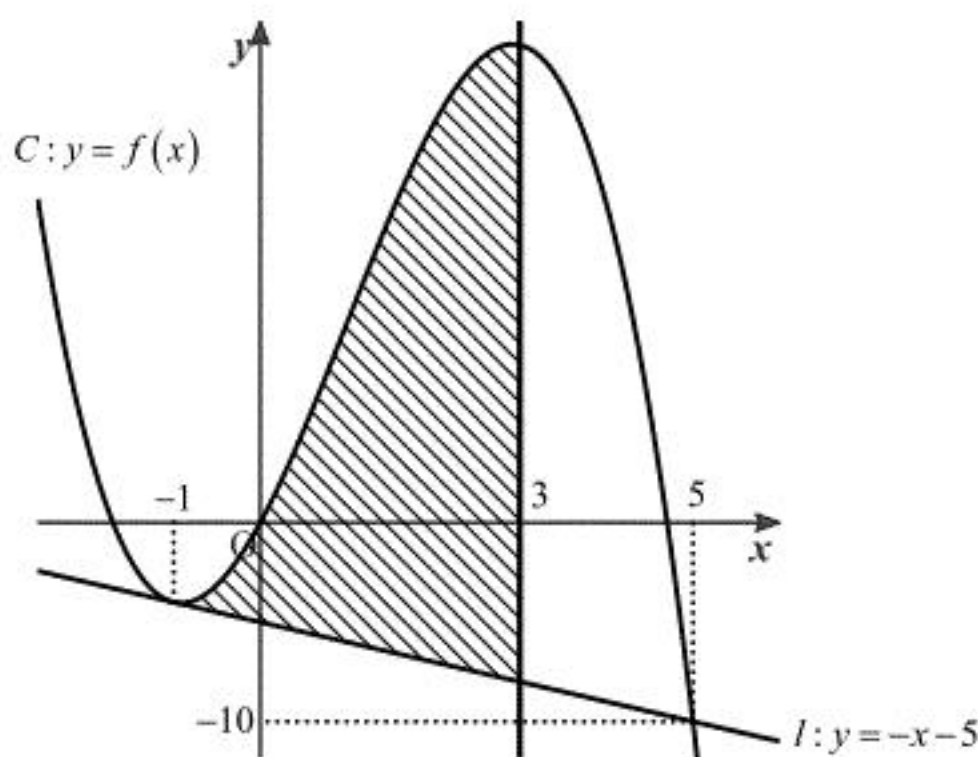
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-5) = 0 \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (-1, -4), (5, -10)$$

と求められる。ここで, $-1 \leq x \leq 3$ において

$$\begin{aligned} f(x) - (-x - 5) &= -x^3 + 3x^2 + 8x + x + 5 \\ &= -(x+1)^2(x-5) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから, $f(x) \geq -x - 5$ が成り立つ。以下に求める面積を斜線部で示す。



以上より, 求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \{f(x) - (-x - 5)\} dx &= \int_{-1}^3 (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 5x \right]_{-1}^3 \\ &= -\frac{81-1}{4} + \{27 - (-1)\} + \frac{9 \cdot (9-1)}{2} + 5 \cdot \{3 - (-1)\} \\ &= 64 \end{aligned}$$

である。

(答) 共有点の座標: $(-1, -4), (5, -10)$, 面積: 64