

〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ		
	1	7	3		
(2)	エ	オ	カ	キ	ク
	7	9	3	1	7

〔解説〕

(1)

分母の有理化を行うと、

$$\begin{aligned}\frac{19}{8-\sqrt{7}} &= \frac{19(8+\sqrt{7})}{(8-\sqrt{7})(8+\sqrt{7})} \\ &= \frac{19(8+\sqrt{7})}{57} \\ &= \frac{8+\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

となる。 $2^2 < 7 < 3^2$ より、 $2 < \sqrt{7} < 3$ であるから、

$$(3 <) \frac{10}{3} < \frac{8+\sqrt{7}}{3} < \frac{11}{3} (< 4)$$

である。よって $\frac{19}{8-\sqrt{7}}$ の整数部分は3であり、 $a=3$ となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}b &= \frac{8+\sqrt{7}}{3} - a \\ &= \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$ab = -1 + \sqrt{7}$ より、

$$\begin{aligned}a^5 b^5 &= (ab)^5 \\ &= (-1+\sqrt{7})^5 \\ &= (-1)^5 + {}_5C_1(-1)^4\sqrt{7} + {}_5C_2(-1)^3(\sqrt{7})^2 + {}_5C_3(-1)^2(\sqrt{7})^3 + {}_5C_4(-1)(\sqrt{7})^4 + (\sqrt{7})^5 \\ &= -1 + 5\sqrt{7} - 70 + 70\sqrt{7} - 245 + 49\sqrt{7} \\ &= -316 + 124\sqrt{7}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\frac{a^5 b^5}{4} = \frac{-316 + 124\sqrt{7}}{4} = -79 + 31\sqrt{7}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	
	5	9	
(2)	ウ	エ	オ
	7	1	8

〔解説〕

(1)

2 回目に取り出した球が白球であるとき、以下の互いに排反な 2 つの場合に分けられる。

[1] 1 回目に黒球を取り出し、2 回目に白球を取り出すとき

この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

[2] 1 回目に白球を取り出し、2 回目に白球を取り出すとき

この確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

である。

以上[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

となる。

(2)

求める確率は、以下の 3 つの事象の余事象の確率である。

[1] 1 回目に白球、2 回目に白球、3 回目に黒球を取り出すとき

この確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

である。

[2] 1 回目に白球、2 回目に黒球、3 回目に白球を取り出すとき

この確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

である。

[3] 1 回目に黒球、2 回目に白球、3 回目に白球を取り出すとき

この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right) = \frac{7}{18}$$

となる。

〔3〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	2	5	5
(2)	エ	オ	カ
	3	1	2

〔解説〕

(1)

直線 $y = \frac{2}{3}ax$, $y = -ax + 5a$ について, x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β とする。 $a > 0$ より, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ である。ゆえに, $0 < \beta - \alpha < \pi$ より, 2 直線のなす角 θ は, $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ ならば $\theta = \beta - \alpha$, $\beta - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ ならば $\theta = \pi - (\beta - \alpha)$ である。・・・①

$a = 2$ のとき,

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{2}{3}a \\ \qquad \qquad = \frac{4}{3} \\ \tan \beta = -a \\ \qquad \qquad = -2 \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\beta - \alpha)| \\ &= \left| \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \right| \\ &= \left| \frac{-2 - \frac{4}{3}}{1 + (-2) \cdot \frac{4}{3}} \right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $\cos \theta > 0$ より,

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{1}{5} \\ \therefore \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。したがって, $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta$ より, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ を得る。

(2)

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, ①より, $\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ であるから, $\tan(\beta - \alpha) = \pm 1$ である。また,

$\tan \beta = -a$, $\tan \alpha = \frac{2}{3}a$ より,

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-a - \frac{2}{3}a}{1 + (-a) \cdot \frac{2}{3}a} \\ &= \frac{-5a}{3 - 2a^2} \end{aligned}$$

である。よって,

[1] $\frac{-5a}{3 - 2a^2} = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{-5a}{3 - 2a^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 5a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + 1)(a - 3) &= 0 \end{aligned}$$

であり, $a > 0$ より $a = 3$ となる。

[2] $\frac{-5a}{3 - 2a^2} = -1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{-5a}{3 - 2a^2} &= -1 \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 5a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a - 1)(a + 3) &= 0 \end{aligned}$$

であり, $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ となる。

以上[1], [2]より, $a = 3, \frac{1}{2}$ を得る。

〔4〕

〔解答〕

(1)	ア	イ				
	8	2				
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	1	1	1	7	2	1

〔解説〕

(1)

(*) の1つの解が3であるとき、 $x=3$ を(*) に代入して、

$$9-6(|t+4|+1)+4|t+4|+|t+3|=0$$

$$\Leftrightarrow 3-2|t+4|+|t+3|=0$$

となる。絶対値の中身が0となる $t=-3, -4$ を境に場合分けする。

[1] $t < -4$ のとき

$$3+2(t+4)-(t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t+8=0$$

$$\therefore t=-8$$

であり、これは $t < -4$ を満たす。

[2] $-4 \leq t < -3$ のとき

$$3-2(t+4)-(t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow -3t-8=0$$

$$\therefore t=-\frac{8}{3}$$

であるが、 $-4 \leq t < -3$ より、不適当である。

[3] $t \geq -3$ のとき

$$3-2(t+4)+(t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow -t-2=0$$

$$\therefore t=-2$$

であり、これは $t \geq -3$ を満たす。

以上[1], [2], [3]より t の値は小さい順に $t=-8, -2$ となる。

(2)

(*) の2つの解が α, β であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2(|t+4|+1) \\ \alpha\beta=4|t+4|+|t+3| \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ に①を代入すると、

$$(\alpha-\beta)^2=4(|t+4|+1)^2-4(4|t+4|+|t+3|)$$

$$=4\{(t+4)^2+2|t+4|+1\}-16|t+4|-4|t+3|$$

$$=4(t^2+8t-2|t+4|-|t+3|+17)$$

となる。 $(\alpha-\beta)^2=8$ を満たすとき、

$$4(t^2+8t-2|t+4|-|t+3|+17)=8$$

$$\Leftrightarrow t^2+8t-2|t+4|-|t+3|+15=0$$

を得る。(1)と同様に $t=-3, -4$ を境に場合分けする。

[1] $t < -4$ のとき

$$t^2+8t+2(t+4)+(t+3)+15=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+11t+26=0$$

$$\therefore t=\frac{-11\pm\sqrt{17}}{2}$$

ここで、 $4^2 < 17 < 5^2$ より $4 < \sqrt{17} < 5$ であるから、

$$-8 < \frac{-11-\sqrt{17}}{2} < -\frac{15}{2}, -\frac{7}{2} < \frac{-11+\sqrt{17}}{2} < -3$$

より、 $t=\frac{-11-\sqrt{17}}{2}$ を得る。

[2] $-4 \leq t < -3$ のとき

$$t^2+8t-2(t+4)+(t+3)+15=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+7t+10=0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t+5)=0$$

$$\therefore t=-2, -5$$

$-4 \leq t < -3$ より、いずれも不適当である。

[3] $t \geq -3$ のとき

$$t^2+8t-2(t+4)-(t+3)+15=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+5t+4=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t+4)=0$$

$$\therefore t=-1, -4$$

$t \geq -3$ より、 $t=-1$ を得る。

以上[1], [2], [3]より、

$$t=\frac{-11-\sqrt{17}}{2}, -1$$

となる。

〔5〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	
	3	7	
(2)	ウ	エ	オ
	2	0	8
(3)	カ	キ	ク
	2	3	3

〔解説〕

(1) $f'(x)=6x^2-6ax+b \qquad \cdots \textcircled{1}$

であるから、 $a=5$ のとき、

$$f'(x)=6x^2-30x+b$$

である。 $f(x)$ が極値をもつ条件は、 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 15^2-6b &> 0 \\ \Leftrightarrow b &< \frac{75}{2} (=37.5) \end{aligned}$$

となる。これを満たす正の整数 b は全部で $1, 2, \dots, 37$ の 37 個である。

(2) $f(x)$ が $x=0$ および $x=2$ において極値をとるとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b=0 \\ 24-12a+b=0 \end{cases} \\ \therefore &a=2, b=0 \end{aligned}$$

である。また、 $f(2)=0$ より、

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + c &= 0 \\ \therefore c &= 8 \end{aligned}$$

を得る。

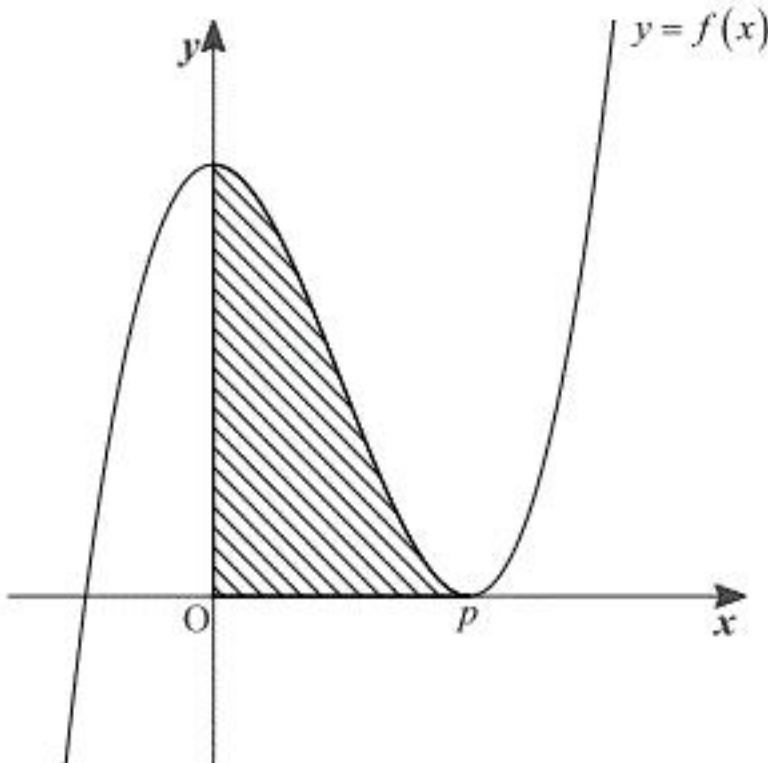
(3) $f(x)$ が $x=0$ および $x=p$ において極値をとるとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(p)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b=0 \\ 6p^2-6ap+b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} b=0 \\ p(p-a)=0 \end{cases} \\ \therefore &a=p, b=0 (\because p>0) \end{aligned}$$

である。また、 $f(p)=0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2p^3-3p \cdot p^2+c &= 0 \\ \therefore c &= p^3 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)=2x^3-3px^2+p^3$ となる。よって、曲線 $y=f(x)$ の $x \geq 0$ の部分と x 軸と y 軸とで囲まれた図形の面積 S は下図の斜線部分の面積である。



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p f(x) dx \\ &= \int_0^p (2x^3-3px^2+p^3) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} - px^3 + p^3x \right]_0^p \\ &= \frac{p^4}{2} \end{aligned}$$

となる。これが $\frac{8}{9}$ となるとき、

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{2} &= \frac{8}{9} \\ \Leftrightarrow p^4 &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

であり、 $p>0$ より、

$$\begin{aligned} p &= \sqrt[4]{\frac{16}{9}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

を得る。

〔6〕

〔解答〕

(1)	ア	イ		
	3	4		
(2)	ウ	エ	オ	
	1	1	0	
(3)	カ	キ	ク	ケ
	1	3	1	2

〔解説〕

(1) $t = \frac{1}{3}$ のとき、 $C(2, 0, 0), D(0, 2, 0)$ であるから、

$$\overrightarrow{AC} = (0, -4, -3), \overrightarrow{AD} = (-2, -2, -3)$$

である。よって三角形 ACD の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25 \cdot 17 - 17^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

となる。

(2) 直線 AB と xy 平面との交点を P とすると、P の座標は実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB} \\ &= (2, 4, 3) + k(1, 3, 3) \\ &= (2+k, 4+3k, 3+3k) \end{aligned}$$

と表せる。P は xy 平面上にあるので、

$$\begin{aligned} 3+3k &= 0 \\ \therefore k &= -1 \end{aligned}$$

である。したがって P の座標は、 $(1, 1, 0)$ となる。

(3) 題意より、
 $\overrightarrow{AC} = (6t-2, -4, -3), \overrightarrow{AD} = (-2, -1-3t, -3)$
 である。B は平面 ACD 上にあるから、B の座標は実数 u, v を用いて、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + u \overrightarrow{AC} + v \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+u(6t-2)-2v \\ 4-4u-(1+3t)v \\ 3-3u-3v \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1+u(6t-2)-2v=0 & \cdots \text{①} \\ -3-4u-(1+3t)v=0 & \cdots \text{②} \\ v=-u-1 & \cdots \text{③} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③を①に代入して、} \\ -1+u(6t-2)-2(-u-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow tu &= -\frac{1}{6} \quad \cdots \text{④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{を得る。また、③を②に代入して、} \\ -3-4u-(1+3t)(-u-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3tu+3t-3u-2 &= 0 \quad \cdots \text{⑤} \end{aligned}$$

となる。ここで④を⑤に代入して、 u について整理すると、

$$u = t - \frac{5}{6}$$

となり、これを④に代入して、

$$\begin{aligned} t \left(t - \frac{5}{6} \right) &= -\frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 5t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-1)(2t-1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。