

【I】

【解答】

(1)	ア	イ		
	1	4		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	5	1	2	1
	キ			
(3)	ク	ケ	コ	サ
	9	1	2	1
	シ			
	6			
(4)	ス	セ	ソ	タ
	1	3	6	5
	チ	ツ	テ	ト
	3	6	1	4

【解説】

(1)
2個のサイコロを同時に投げるとき、目の出方は全部で $6^2=36$ 通りであり、これらは同様に確からしい。出た目が両方とも偶数である目の出方は $3^2=9$ 通りであるから、求める確率は

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

である。

(2)
2個のサイコロを同時に投げるとき、出た目の積が4の倍数となる目の組み合わせは、「少なくとも一方が4」、または「両方とも4以外の2の倍数」の場合である。

[1] 少なくとも一方が4のとき

サイコロの目の組み合わせは
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
であるから、目の出方は2個のサイコロを区別して、11通りとなる。

[2] 両方とも4以外の2の倍数のとき

サイコロの目の組み合わせは
(2, 2), (2, 6), (6, 6)
であるから、目の出方は2個のサイコロを区別して、4通りとなる。

以上から、[1], [2]は互いに排反な事象であるから、求める確率は

$$\frac{11+4}{36}=\frac{5}{12}$$

となる。また、少なくとも一方の目が2である目の組み合わせは

$$(2, 2), (2, 4), (2, 6)$$

であり、目の出方は2個のサイコロを区別して、5通りとなる。以上より、出た2つの目の積が4の倍数であったとき、少なくとも一方の目が2である確率は

$$\frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{3}$$

である。

(3)
3個のサイコロを同時に投げるとき、目の出方は全部で $6^3=216$ 通りで同様に確からしい。出た目の積が5の倍数となる条件は「少なくとも1つの5が出る」であり、その余事象は「1つも5がでない」ことであるから、求める確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

となる。

(4)
3個のサイコロを同時に投げて、出た3つの目のうち最も大きい数を M 、最も小さい数を m とする。「 $M=2$ かつ $m=1$ 」となる目の組み合わせは、
(1, 1, 2), (1, 2, 2)

であり、目の出方は3個のサイコロを区別して、6通りとなる。よって求める確率は、

$$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$$

となる。ここで、「 $M=3$ かつ $m=2$ 」となる確率、「 $M=4$ かつ $m=3$ 」となる確率、

「 $M=5$ かつ $m=4$ 」となる確率、「 $M=6$ かつ $m=5$ 」となる確率は、同様に $\frac{1}{36}$ であり、こ

れらは互いに排反な事象であるから、「 $M-m=1$ 」となる確率は、

$$\frac{1}{36}\cdot 5=\frac{5}{36}$$

となる。また、「 $M-m=3$ 」となる条件は、「 $M=4$ かつ $m=1$ 」または「 $M=5$ かつ $m=2$ 」または「 $M=6$ かつ $m=3$ 」の3つである。それぞれの条件における目の出方について考える。

[1] $M=4$ かつ $m=1$ のとき

目の組み合わせは、
(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4)
であるから、目の出方は3個のサイコロを区別して、18通りとなる。

[2] $M=5$ かつ $m=2$ のとき

目の組み合わせは、
(2, 2, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5)
であるから、[1]と同様にして目の出方は18通りとなる。

[3] $M=6$ かつ $m=3$ のとき

目の組み合わせは、
(3, 3, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (3, 6, 6)
であるから、[1]と同様にして目の出方は18通りとなる。

以上より、これら[1], [2], [3]は互いに排反な事象であるから、求める確率は、

$$\frac{18\cdot 3}{216}=\frac{1}{4}$$

である。

【Ⅱ】

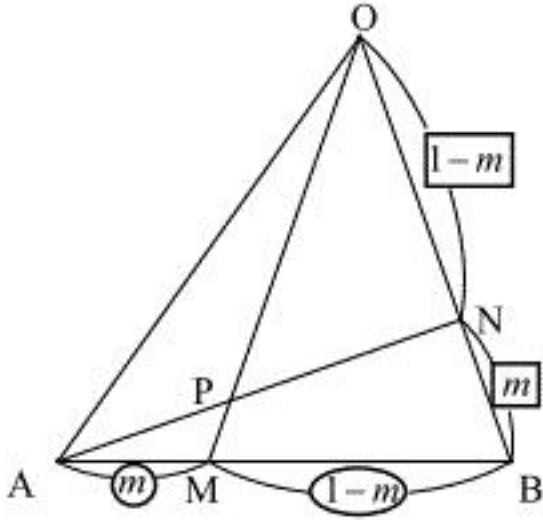
【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	2	0	2	－
	オ	カ	キ	ク
	4	0	4	2
	ケ	コ	サ	シ
	4	－	1	1
	ス	セ	ソ	タ
	1	2	1	3
(2)	チ	ツ	テ	ト
	1	2	5	6

【解説】

(1)

△OABと点M, N, Pを図示すると以下のようになる。



点Mは辺ABを $m:(1-m)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OM}=(1-m)\vec{a}+m\vec{b}$$

$$\overrightarrow{ON}=(1-m)\vec{b}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OM}$ 、 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AN}$ (s, t は実数)とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=s\overrightarrow{OM} \\ &=s(1-m)\vec{a}+sm\vec{b}\end{aligned}\qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=t\overrightarrow{AN} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}&=t(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}&=t\overrightarrow{ON}+(1-t)\overrightarrow{OA} \\ \therefore \overrightarrow{OP}&=(1-t)\vec{a}+t(1-m)\vec{b}\end{aligned}\qquad \cdots \textcircled{2}$$

と変形でき、 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 、 $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行なベクトルではないことから、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の係数を比較して

$$\begin{aligned}&\begin{cases} s(1-m)=1-t \\ sm=t(1-m) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} s=\dfrac{1-m}{m^2-m+1} \\ t=\dfrac{m}{m^2-m+1} \end{cases}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\dfrac{(1-m)^2}{m^2-m+1}\vec{a}+\dfrac{m(1-m)}{m^2-m+1}\vec{b} \\ &=\dfrac{1-m}{m^2-m+1}\cdot\dfrac{(1-m)^2\vec{a}+m(1-m)\vec{b}}{m(1-m)+(1-m)^2}\end{aligned}$$

となるから、点Pは線分OMを $(1-m):m^2$ に内分する点である。△OAPの面積 S_2 は、△OABの面積 S_1 を用いて

$$\begin{aligned}S_2&=S_1\cdot m\cdot\dfrac{1-m}{(1-m)+m^2} \\ \therefore \dfrac{S_2}{S_1}&=\dfrac{m-m^2}{m^2-m+1}\end{aligned}$$

となる。ここで、整式 $m-m^2$ を整式 m^2-m+1 で割った商は -1 、余りは1であるから

$$\dfrac{S_2}{S_1}=-1+\dfrac{1}{m^2-m+1}$$

が得られる。分母 m^2-m+1 が最小値をとるとき、 $\dfrac{S_2}{S_1}$ が最大値をとるから

$$m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$$

より、 $m=\dfrac{1}{2}$ のとき m^2-m+1 は最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとり、 $\dfrac{S_2}{S_1}$ は最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。

(2)

2直線OM, ANが直交することから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AN}&=0 \\ \Leftrightarrow \left\{(1-m)\vec{a}+m\vec{b}\right\}\cdot\left\{(1-m)\vec{b}-\vec{a}\right\}&=0 \\ \Leftrightarrow (m-1)\left|\vec{a}\right|^2+\left(1-3m+m^2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+m(1-m)\left|\vec{b}\right|^2&=0 \\ \Leftrightarrow 2(m-1)-\left(1-3m+m^2\right)+3m(1-m)=0\left(\because\left|\vec{a}\right|^2=2,\left|\vec{b}\right|^2=3,\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\right) \\ \Leftrightarrow 4m^2-8m+3&=0 \\ \Leftrightarrow (2m-1)(2m-3)&=0 \\ \therefore m&=\dfrac{1}{2}\left(\because 0<m<1\right)\end{aligned}$$

となる。このとき(1)から $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{3}$ であり、△OABの面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \\ &=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot 3-(-1)^2} \\ &=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

であるから、△OAPの面積 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2&=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{3} \\ &=\dfrac{\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	2	5	2	2
	オ	カ	キ	ク
	5	2	0	2
	ケ	コ	サ	シ
	9	4	5	6
	ス			
	7			
(2)	セ	ソ	タ	チ
	6	1	2	1

【解説】

(1)

点 A(0, 4), 点 B(−1, 3), 点 C(3, 0) より,

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-1-0)^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} \\ &= 5 \\ BC &= \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + (0-3)^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

である。△ ABC について余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{2+25-25}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 5} \\ &= \frac{1}{10} \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。θ は△ ABC の内角なので、0° < θ < 180° より sin θ > 0 であるから

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1-\cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} \\ &= \frac{7}{10} \sqrt{2}\end{aligned}$$

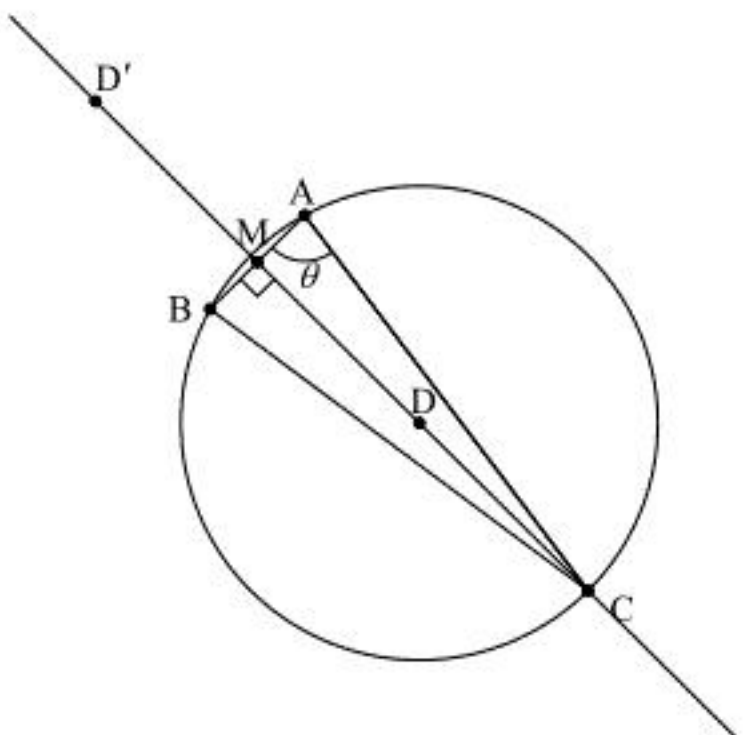
となり、△ ABC について正弦定理を用いて

$$\begin{aligned}2R &= \frac{5}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{25}{14} \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。△ ABC は AC = BC の二等辺三角形であるから、線分 AB と直線 CM は垂直に交わり、

$$\begin{aligned}CM^2 &= BC^2 - BM^2 \\ &= 5^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{49}{2} \\ \therefore CM &= \frac{7}{2} \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。点 D は直線 CM 上にあり、 $CD = R = \frac{25}{14} \sqrt{2}$ より以下の図のようになる。



上図より点 D は△ ABC の外接円の中心である。よって

$$\overline{CD} = \frac{25}{49} \overline{CM}$$

であり、点 D(x, y) とおくと、点 C(3, 0), 点 $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ なので

$$\begin{aligned}(x-3, y) &= \frac{25}{49} \left(-\frac{1}{2}-3, \frac{7}{2}\right) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= \left(\frac{17}{14}, \frac{25}{14}\right)\end{aligned}$$

となる。次に、直線 AB に対して点 D と対称な点 D'(x', y') とおく。上図より点 D' は直線 DM 上にあるから、 $\overline{DM} = \overline{MD'}$ が成り立つことより、

$$\begin{aligned}\overline{DM} &= \overline{MD'} \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}-\frac{17}{14}, \frac{7}{2}-\frac{25}{14}\right) &= \left(x'+\frac{1}{2}, y'-\frac{7}{2}\right) \\ \therefore x' &= -\frac{31}{14}, y' = \frac{73}{14}\end{aligned}$$

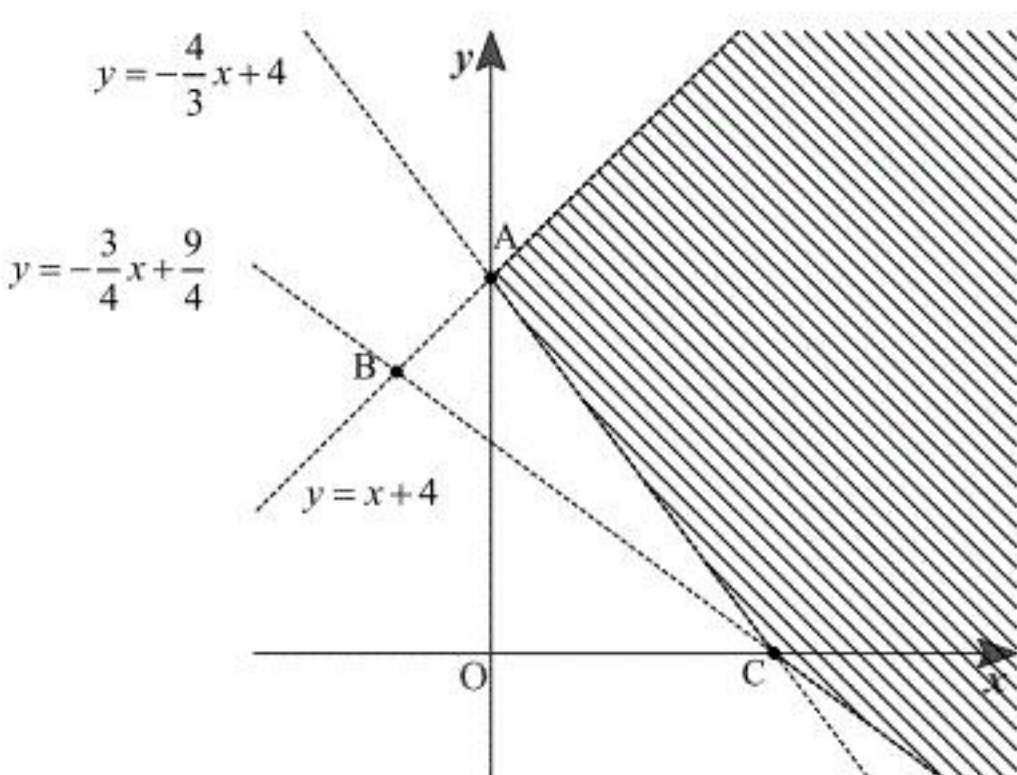
となる。

(2)

連立不等式

$$\begin{aligned}&\begin{cases} x-y+4 > 0 \\ 4x+3y-12 > 0 \\ 3x+4y-9 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y < x+4 \\ y > -\frac{4}{3}x+4 \\ y > -\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \end{cases}\end{aligned}$$

が示す領域は下図の斜線部のとおりである。（境界含まない）



したがって、問題文の図1の⑥の部分となる。また、問題文の図1の⑤の部分は、連立不等式

$$\begin{cases} x-y+4 > 0 \\ 4x+3y-12 < 0 \\ 3x+4y-9 > 0 \end{cases}$$

が表す領域である。

【Ⅳ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ
1	7	8	6
オ	カ	キ	ク
4	3	2	7
ケ	コ	サ	シ
4	1	2	0
ス	セ	ソ	タ
1	3	－	2
チ	ツ	テ	
2	7	8	

【解説】

関数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x$ とすると

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

であるから、曲線 C 上の点 $A(1, f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}y-f(1) &= f'(1)(x-1) \\ \Leftrightarrow y-0 &= 1 \cdot (x-1) \\ \therefore y &= x-1\end{aligned}$$

となる。また、曲線 C 上の点 $B(2, f(2))$ における接線 m の方程式は

$$\begin{aligned}y-f(2) &= f'(2)(x-2) \\ \Leftrightarrow y-3 &= \frac{11}{2} \cdot (x-2) \\ \therefore y &= \frac{11}{2}x-8\end{aligned}$$

となる。ここで接線 ℓ, m の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}x-1 &= \frac{11}{2}x-8 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}x &= 7 \\ \therefore x &= \frac{14}{9}\end{aligned}$$

であるから、 y 座標は、

$$\begin{aligned}y &= \frac{14}{9}-1 \\ &= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

となり、交点 P の座標は $P\left(\frac{14}{9}, \frac{5}{9}\right)$ である。曲線 C 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y-f(a) &= f'(a)(x-a) \\ \Leftrightarrow y-\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a\right) &= \left(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}\right) \cdot (x-a) \\ \therefore y &= \frac{3a^2-1}{2}x-a^3 \qquad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。直線①が点 P を通るのは、

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} &= \frac{3a^2-1}{2} \cdot \frac{14}{9} - a^3 \\ \Leftrightarrow 3a^3-7a^2+4 &= 0 \qquad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

を満たすときであり、

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow 3(a-1)(a-2)(3a+2)=0 \\ \therefore a &= 1, 2, -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。接線 ℓ, m はそれぞれ点 P を通ることから、 $a=1$ のとき接線 ℓ 、 $a=2$ のとき接線 m

となる。よって接線 n の方程式は、 $a=-\frac{2}{3}$ のときであり、

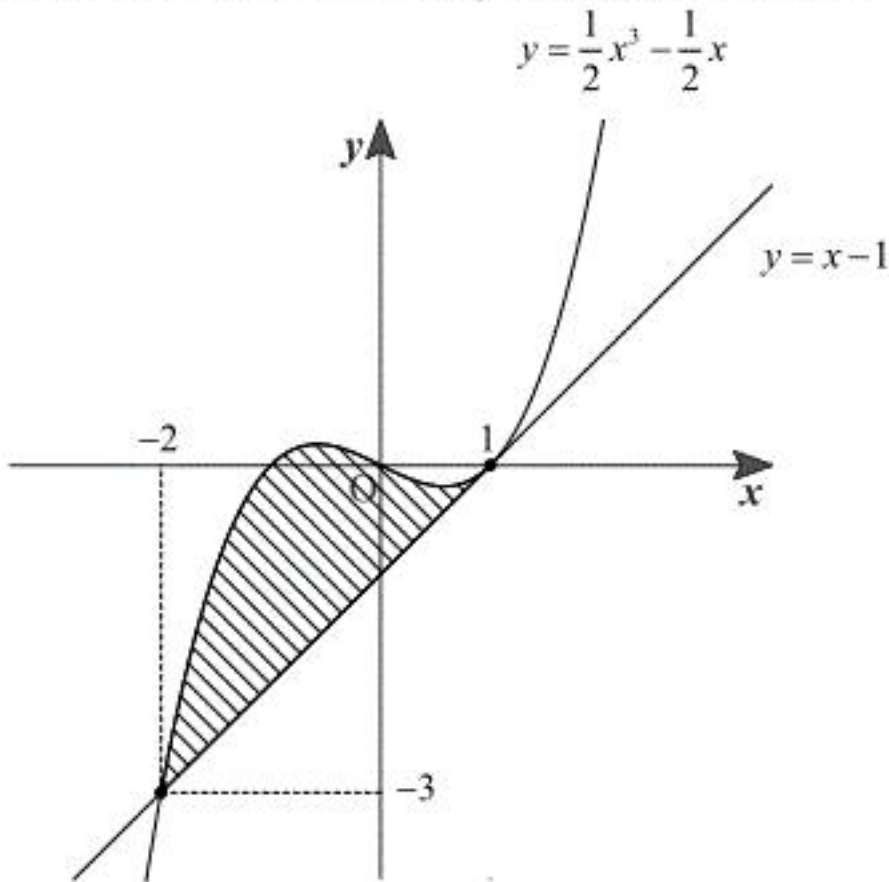
$$\begin{aligned}y &= \frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1}{2}x-\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{6}x+\frac{8}{27}\end{aligned}$$

である。曲線 C と接線 ℓ の共有点は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x &= x-1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1\end{aligned}$$

となるから、点 A 以外の共有点の x 座標は $x=-2$ である。また、曲線 C と接線 ℓ で

囲まれた部分は以下の図の斜線部のとおりであり、その面積を S とする。



以上より、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^1 \left\{ \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x - (x-1) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x-1)^2 (x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x-1)^2 (x-1+3) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 \left\{ (x-1)^3 + 3(x-1)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^3 \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

となる。

〔V〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
5	1	3	5
オ	カ	キ	ク
3	1	2	5
ケ	コ	サ	シ
3	2	4	4
ス	セ	ソ	タ
0	2	1	6

〔解説〕

数列 $\{a_n\}$ の漸化式は、

$$3a_{n+2}-7a_{n+1}+2a_n=0 \left(n=1, 2, 3, \cdots\right) \qquad \cdots \textcircled{\text{①}}$$

を満たし $a_1=1, a_2=7$ であるとする。数列 $b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} b_1 &= 7-2\cdot 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{①}} \Leftrightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-2a_n)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$$

であるから、数列 $\{b_n\}$ は初項 5、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。よって数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n=5\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となり、したがって

$$a_{n+1}-2a_n=5\cdot 3^{1-n} \qquad \cdots \textcircled{\text{②}}$$

と導ける。また、数列 $c_n=a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n$ とおくと

$$\begin{aligned} c_1 &= 7-\frac{1}{3}\cdot 1 \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{①}} \Leftrightarrow a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1} &= 2\left(a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n\right) \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= 2c_n \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{20}{3}$ 、公比 2 の等比数列である。よって数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{20}{3}\cdot 2^{n-1} \\ &= \frac{5}{3}\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

となり、したがって

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=\frac{5}{3}\cdot 2^{n+1} \qquad \cdots \textcircled{\text{③}}$$

となる。式②、③から a_{n+1} を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}a_n &= \frac{5}{3}\cdot 2^{n+1}-5\cdot 3^{1-n} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2^{n+1}-3^{2-n} \end{aligned}$$

となる。すべての正の整数 n に対して、 $0<3^{2-n}<1$ となるのは

$$\begin{aligned} 2-n &< 0 \\ \Leftrightarrow n &> 2 \end{aligned}$$

のときである。ここで、 2^k (k は正の実数)が 6 桁となる最小の値 k とすると、

$$\begin{aligned} 10^5 &\leq 2^k < 10^6 \\ \Leftrightarrow 5 &\leq \log_{10} 2^k < 6 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{\log_{10} 2} &\leq k < \frac{6}{\log_{10} 2} \end{aligned}$$

となり、 $0.30<\log_{10} 2<0.31$ であるから

$$\begin{aligned} 16 &< \frac{5}{0.31} < \frac{5}{\log_{10} 2} < \frac{5}{0.30} < 17 \\ 19 &< \frac{6}{0.31} < \frac{6}{\log_{10} 2} < \frac{6}{0.30} = 20 \end{aligned}$$

となる。よって

$$16 < \frac{5}{\log_{10} 2} \leq k < \frac{6}{\log_{10} 2} < 20$$

が得られ、 $k=17$ のとき、 2^k が 6 桁となる最小の値を示す。したがって

$$m+1=17 \Leftrightarrow m=16$$

となる。

【Ⅵ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	7	2	5	3
(2)	オ	カ	キ	ク
	1	3	2	4
	ケ	コ	サ	シ
	3	2	4	1
	ス	セ	ソ	
	2	2	4	
(3)	タ	チ	ツ	
	6	2	4	

【解説】

(1)

関数 $f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x + \frac{2}{\pi} \\ &= x \cos x + \frac{2}{\pi} \\ f''(x) &= 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) \\ &= -x \sin x + \cos x \\ f'''(x) &= -1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x - \sin x \\ &= -x \cos x - 2 \sin x \end{aligned}$$

であるから、それぞれ

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{2}{\pi} \\ f''(0) &= 1 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{2}{\pi} \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\ f'(\pi) &= \frac{-\pi^2 + 2}{\pi} \\ f''(\pi) &= -1 \end{aligned}$$

となり、この6個の値のうち、負の値は3個である。

(2)

$f(x)$ の増減および C の凹凸について調べ、 C の概形を考える。

(i)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $f'(x)$ は、 $x > 0, 0 < \cos x < 1$ より常に正の値をとる。また、 $f'''(x)$ は

$x > 0, 0 < \cos x < 1, 0 < \sin x < 1$ から

$$f'''(x) = -(x \cos x + \sin x) < 0$$

である。よって $f''(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において単調減少する。(1)より $f''(0) > 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ よ

り、 $f''(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ においてただ一つ解をもつ。したがって $f''(x)$ は正の値も負の値もと

る。

(ii)

$f''(x)$ は

$$f''(x) = -x \sin x + \cos x = x \cos x \left(\frac{1}{x} - \tan x \right)$$

であり、 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき、 $\frac{1}{x} > 0, \tan x < 0$ より、

$$\frac{1}{x} - \tan x > 0, x > 0, \cos x < 0$$

となるから、 $f''(x)$ はつねに負の値をとる。したがって、 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において、 $f'(x)$ は単調

減少する。(1)より、 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f'(\pi) < 0$ から、 $f'(x)$ は $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ においてただ一つ解をも

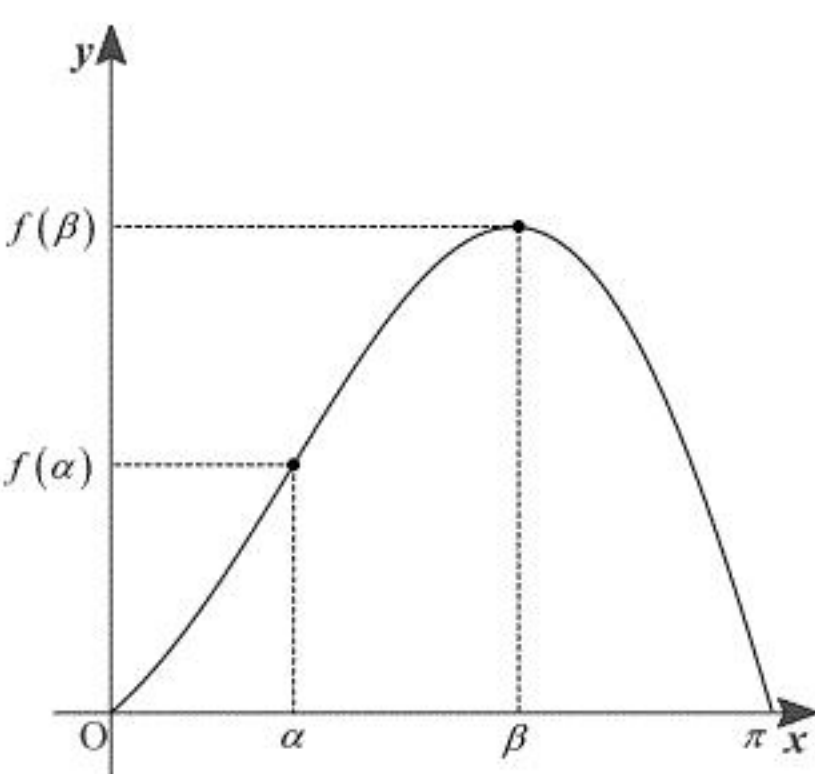
つ。その解を $x = \beta$ とする。

(iii)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ における $f''(x) = 0$ の解を $x = \alpha$ とする。(i),(ii)より増減表は以下のようになる。

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$	...	β	...	π
$f'(x)$	$\frac{2}{\pi}$	+	$f'(\alpha)$	+	$\frac{2}{\pi}$	+	0	-	$\frac{-\pi^2 + 2}{\pi}$
$f''(x)$	1	+	0	-	$-\frac{\pi}{2}$	-	-	-	-1
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	$f(\beta)$	↘	0

また、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



以上から、 $0 < x < \alpha$ において $f(x)$ はつねに増加し、 C は下に凸であり、 $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ において

$f(x)$ はつねに増加し、 C は上に凸であり、 $\frac{\pi}{2} < x < \beta$ においても $f(x)$ はつねに増加し、 C は

上に凸であり、 $\beta < x < \pi$ においては $f(x)$ はつねに減少し、 C は上に凸である。

(3)

$f(x)$ の不定積分は、積分定数を K として、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(x \sin x + \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1 \right) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx + \sin x + \frac{1}{\pi}x^2 - x + K \\ &= -x \cos x + 2 \sin x + \frac{1}{\pi}x^2 - x + K \end{aligned}$$

である。曲線 C と x 軸および2直線 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積を S とおくと、面積 S

は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= \left[-x \cos x + 2 \sin x + \frac{1}{\pi}x^2 - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

【Ⅶ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ
4	2	1	6
オ	カ	キ	ク
8	4	4	5
ケ	コ	サ	シ
2	0	6	1
ス	セ	ソ	タ
6	1	4	－
チ	ツ		
4	8		

【解説】

関数 $f(x)=\sqrt{x}e^{-2x}$ ($x\geq 0$) とすると、 $x>0$ における $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-2x} - 2\sqrt{x}e^{-2x} \\ &= \frac{1-4x}{2\sqrt{x}}e^{-2x} \end{aligned}$$

であり、また $x>0$ における $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4\cdot 2\sqrt{x}-(1-4x)\cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}\cdot e^{-2x} - 2\cdot \frac{1-4x}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-2x} \\ &= \frac{16x^2-8x-1}{4x\sqrt{x}}e^{-2x} \end{aligned}$$

となる。ここで $f'(x)=0$ となる x を α とすると、 $\sqrt{x}>0, e^{-2x}>0$ より

$$\begin{aligned} 1-4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

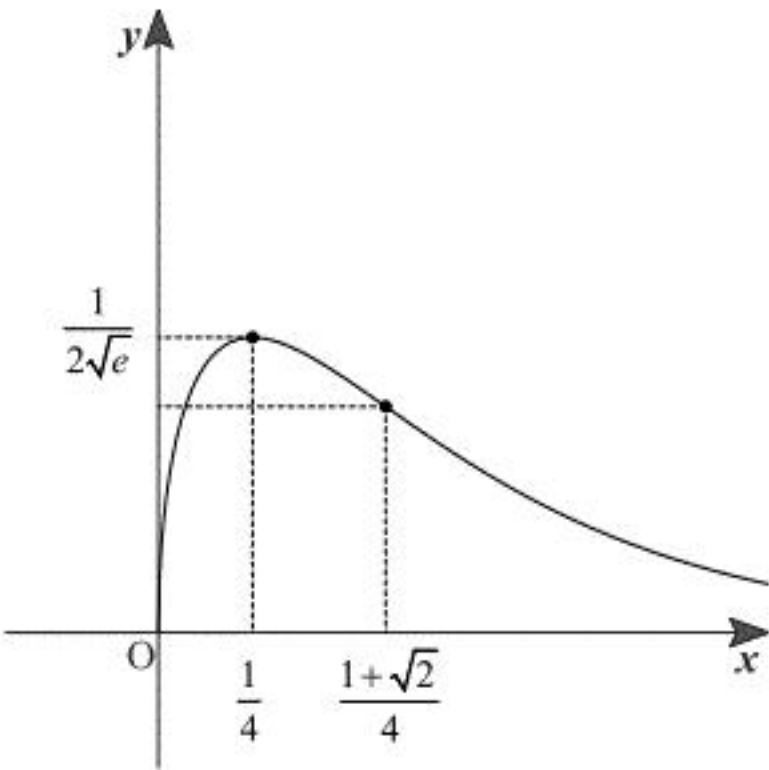
となるから $\alpha=\frac{1}{4}$ である。 $f''(x)=0$ となる x を β とすると、 $x\sqrt{x}>0, e^{-2x}>0$ より

$$\begin{aligned} 16x^2-8x-1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad (\because x>0) \end{aligned}$$

となるから $\beta=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ である。したがって、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$	...
$f'(x)$		+	0	－	－	－
$f''(x)$		－	－	－	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	$f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$	$\searrow$

また、 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



以上より、 $f(\alpha)$ は $f(x)$ の極大値であり、最大値である。また、 $0<x<\beta$ において、 $f(x)$ は増加したのち減少して、 C は上に凸である。 $x>\beta$ においては、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は下に凸である。実数 k として、方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数について、上図を用いて $y=k$

と $y=f(x)$ の共有点の個数を考える。異なる2つの実数解をもつのは、 $0<k<\frac{1}{2\sqrt{e}}$ のとき

であり、ちょうど1つの実数解をもつのは、 $k=0, \frac{1}{2\sqrt{e}}$ のときである。また、実数解をもたないのは、 $k<0$ または $k>\frac{1}{2\sqrt{e}}$ のときである。 x 軸と曲線 C 、および直線 $x=n$ で囲まれた部

分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_n とすると

$$\begin{aligned} V_n &= \int_0^n \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_0^n \left(\sqrt{x}\cdot e^{-2x}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^n x\cdot e^{-4x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ \left[-xe^{-4x}\right]_0^n + \int_0^n e^{-4x} dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ -ne^{-4n} + \left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^n \right\} \\ &= \frac{\pi}{16} \left\{ 1-(4n+1)e^{-4n} \right\} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{V_{n+1}-V_n}{V_n-V_{n-1}} &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{-(4n+5)e^{-4(n+1)}+(4n+1)e^{-4n}}{-(4n+1)e^{-4n}+(4n-3)e^{-4(n-1)}} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{-\left(1+\frac{5}{4n}\right)e^{-8}+\left(1+\frac{1}{4n}\right)e^{-4}}{-\left(1+\frac{1}{4n}\right)e^{-4}+\left(1-\frac{3}{4n}\right)} \\ &= \frac{-e^{-8}+e^{-4}}{-e^{-4}+1} \\ &= e^{-4} \end{aligned}$$

となる。