

2020 年度入学試験問題

情報科学部A方式

2 限 数 学 (90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 問題文は 4 ページから25ページまでです。
4. マークシート解答方法については以下の解答上の注意を読みなさい。
5. 問題冊子のページを切り離してはいけません。

解答上の注意

1. 問題文中のア, イ, ウ, … のそれぞれには, 特に指示がないかぎり, - (マイナスの符号), 0~9 の数が1つずつ入ります。解答群が示されている場合は, 選択肢のアルファベットが1つずつ入ります。当てはまるものを選び, マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。
ただし, 分数の形で解答が求められているときには, 符号は分子に付け, 分母・分子を可能な限り約分して解答しなさい。
また, 根号を含む形で解答が求められているときには, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

例	解答欄	解答	記入のしかた
1.	$\frac{\boxed{\text{アイ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$	$-\frac{\sqrt{18}}{22}$	$\frac{\boxed{-3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}\boxed{2}}$

2. マークシート記入上の注意については, 問題冊子の裏表紙に記載してあるので, この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし, 問題冊子を開いてはいけません。

[I]

(1) i を虚数単位とする。 z の方程式 $8z^3 = i$ の解は

$$z = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}i, \quad -\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}i, \quad \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}i$$

である。

(2) a を実数とする。 x の方程式

$$\cos^2 x + \sin x + a = 0$$

が, $0 \leq x \leq \pi$ において, 少なくとも 1 つ解をもつのは

$$\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leq a \leq \boxed{\text{ソタ}}$$

のときである。

(〔I〕の問題は続く)

- (3) $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{100}$ を小数で表したとき、小数第 チツ 位に初めて 0 でない数字が現れる。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(4)

• n を正の整数とすると、 n^2 が 3 の倍数であることは、 n が 3 の倍数であることの テ。

• x を実数とすると、 $|x - 3| = 5x$ は、 $x = -\frac{3}{4}$ であることの ト。

テ， ト の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

- ① 必要条件でも十分条件でもない
 - ② 必要条件であるが、十分条件ではない
 - ③ 十分条件であるが、必要条件ではない
 - ④ 必要十分条件である

〔Ⅱ〕

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}$$

とする。

座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 C は曲線 $y = \frac{\boxed{\mathcal{P}}}{x}$ を、 x 軸方向に

$\boxed{\text{イ}}$ ， y 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$ だけ平行移動したものである。

直線 $y = -x - 4$ を ℓ とする。 C と ℓ の交点の x 座標は $\boxed{\text{エオ}}$ および $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{エオ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

曲線 C 上の点 $\left(\boxed{\text{エオ}}, f(\boxed{\text{エオ}}) \right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}x + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(〔Ⅱ〕の問題は続く)

x, y が連立不等式

$$\begin{cases} x < 3 \\ y \geq -x - 4 \\ y \leq \frac{3x}{x-3} \end{cases}$$

を満たすとき、 $9x + 16y$ の最小値は シスセ , 最大値は ソ である。

C と直線 l で囲まれた部分の面積は

$$\boxed{\text{タチ}} - \boxed{\text{ツテ}} \log 3$$

である。ただし、対数は自然対数とする。

〔Ⅲ〕

点 O を原点とする座標平面上に点 P(2, 3) と Q(3, 4) がある。

(1) 2 点 P, Q の中点と O を通る直線の傾きは $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) k を実数とし、直線 $y = kx$ を ℓ とする。 $\vec{s} = (1, \boxed{\text{ウ}})$ は、 ℓ に平行なベクトルである。 ℓ と直線 OP のなす角を α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$)、 ℓ と直線 OQ のなす角を β ($0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) とする。

$$\vec{s} \cdot \vec{OP} = \boxed{\text{エ}}$$

であり、

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}} \sqrt{1 + \boxed{\text{ク}}}}$$

である。

同様に、

$$\cos \beta = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}} \sqrt{1 + \boxed{\text{サ}}}}$$

である。

$\alpha = \beta$ となるのは、

$$k = \frac{\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

のときである。

ウ ～ オ , ク , ケ , サ の解答群 (同じものを何回選んでもよい。)

Ⓐ 0

Ⓑ 1

Ⓒ k

Ⓓ k^2

Ⓔ k^3

Ⓕ $k + 1$

Ⓖ $3k + 2$

Ⓗ $4k + 3$

Ⓙ $2k + 3$

Ⓚ $3k + 4$

(〔Ⅲ〕の問題は続く)

- (3) t を実数とし、直線 $y = tx$ を m とする。P(2, 3) と m の距離を u 、
Q(3, 4) と m の距離を v とする。

t の関数 $f(t)$ を、 $f(t) = u^2 + v^2$ とする。

$$f(t) = \frac{\boxed{\text{ツテ}} t^2 - \boxed{\text{トナ}} t + \boxed{\text{ニヌ}}}{t^2 + \boxed{\text{ネ}}}$$

であり、右辺の分子を分母で割ると、商は $\boxed{\text{ノハ}}$ 、余りは
 $-\boxed{\text{ヒフ}} \left(\boxed{\text{ヘ}} t - 1 \right)$ である。

よって、

$$f(t) = \boxed{\text{ノハ}} - \frac{\boxed{\text{ヒフ}} \left(\boxed{\text{ヘ}} t - 1 \right)}{t^2 + \boxed{\text{ホ}}}$$

となり、

$$f'(t) = \frac{\boxed{\text{マミ}} \left(\boxed{\text{ム}} t^2 - \boxed{\text{メ}} t - 3 \right)}{\left(t^2 + \boxed{\text{モ}} \right)^{\boxed{\text{ヤ}}}}$$

となる。

$$f(t) \text{ は、 } t = \frac{\boxed{\text{ユ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヨラ}}}}{\boxed{\text{リ}}} \text{ のとき、最小値をとる。}$$

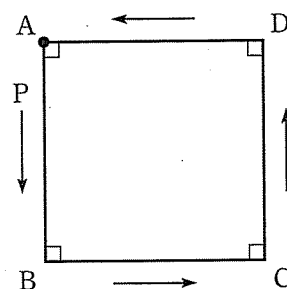
(計 算 用 紙)

〔Ⅳ〕

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。

1 個のさいころを投げて出た目によって, ABCD の周上を, 左まわりに動く点 P がある。1 回目にさいころを投げる前に P は頂点 A の上にある。

さいころを投げて出た目が x であるとき, P は次のように動く。P が頂点 A または B の上にあるとき, P は距離 x だけ進み, P が頂点 C または D の上にあるとき, P は距離 4 だけ進む。



さいころを n 回投げたとき、P が頂点 A の上にある確率を a_n 、P が頂点 B の上にある確率を b_n とすると、

$$a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad b_1 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり、 a_{n+1} 、 b_{n+1} を、それぞれ a_n と b_n を用いて表すと

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} a_n + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} a_n + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} b_n$$

となる。

(〔IV〕の問題は続く)

数列 $\{a_n + \beta b_n\}$ が等比数列となるような β の値は,

$$\beta = \pm \boxed{\text{ス}}$$

である。 $\beta_1 = \boxed{\text{ス}}$, $\beta_2 = -\boxed{\text{ス}}$ とおく。

数列 $\{c_n\}$ を, $c_n = a_n + \beta_1 b_n$ で定める。 $\{c_n\}$ は, 初項 $\boxed{\text{セ}}$, 公比 $\boxed{\text{ソ}}$ の等比数列であり, 一般項 $c_n = a_n + \beta_1 b_n$ は

$$a_n + \beta_1 b_n = \left(\boxed{\text{タ}} \right)^{\boxed{\text{チ}}} \dots\dots\dots \textcircled{\text{i}}$$

である。

数列 $\{d_n\}$ を, $d_n = a_n + \beta_2 b_n$ で定める。 $\{d_n\}$ の一般項 $d_n = a_n + \beta_2 b_n$ は

$$a_n + \beta_2 b_n = \left(\boxed{\text{ツ}} \right)^{\boxed{\text{テ}}} \dots\dots\dots \textcircled{\text{ii}}$$

である。

無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{\boxed{\text{ト}} - \boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$$

である。

ス ～ タ , ツ の解答群 (同じものを何回選んでもよい。)

Ⓐ $\frac{1}{2}$	Ⓑ $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$	Ⓒ $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$	Ⓓ $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
Ⓔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	Ⓕ $-\frac{1}{2}$	Ⓖ $\frac{1 + \sqrt{2}}{6}$	Ⓗ $\frac{1 - \sqrt{2}}{6}$
Ⓘ $\frac{\sqrt{2} - 1}{6}$	Ⓚ $\frac{\sqrt{2}}{6}$		

チ , テ の解答群 (同じものを何回選んでもよい。)

Ⓐ n	Ⓑ $n - 1$	Ⓒ $n + 1$	Ⓓ $1 - n$
Ⓔ $-n - 1$	Ⓕ $2n$	Ⓖ $2n + 1$	Ⓗ $2n - 1$
Ⓘ n^2	Ⓚ n^3		

(〔IV〕の問題は続く)

式①, ②から b_n を消去すると,

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \left\{ \left(\boxed{\text{ヒ}} \right)^{\boxed{\text{フ}}} + \left(\boxed{\text{ヘ}} \right)^{\boxed{\text{ホ}}} \right\}$$

となる。ただし, $\boxed{\text{ヒ}} > \boxed{\text{ヘ}}$ とする。

同様に, 式①, ②から a_n を消去すると,

$$b_n = \frac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}} \left\{ \left(\boxed{\text{ム}} \right)^{\boxed{\text{メ}}} - \left(\boxed{\text{モ}} \right)^{\boxed{\text{ヤ}}} \right\}$$

となる。

また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ユ}}} + \boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラリ}}}$$

である。

ヒ， **ヘ**， **ム**， **モ** の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Ⓐ $\frac{1}{2}$ | Ⓑ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ | Ⓒ $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ | Ⓓ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ |
| Ⓔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | Ⓕ $-\frac{1}{2}$ | Ⓖ $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$ | Ⓗ $\frac{1-\sqrt{2}}{6}$ |
| Ⓘ $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$ | Ⓚ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ | | |

フ， **ホ**， **メ**， **ヤ** の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

- | | | | |
|----------|---------|----------|----------|
| Ⓐ n | Ⓑ $n-1$ | Ⓒ $n+1$ | Ⓓ $1-n$ |
| Ⓔ $-n-1$ | Ⓕ $2n$ | Ⓖ $2n+1$ | Ⓗ $2n-1$ |
| Ⓘ n^2 | Ⓚ n^3 | | |

[V]

曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を F , 曲線 $y = \sqrt{3} \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を G とする。

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で, $|\sin x| = |\sqrt{3} \cos x|$ となる x の値は

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$$

である。ただし, $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \pi < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \pi < \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$ とする。

(2) F と G および 2 直線 $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$ で囲まれた部分の面積は

$$\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

(〔V〕の問題は続く)

(3) 不定積分 $\int \sin^2 x \, dx$ は

$$\int \sin^2 x \, dx = \boxed{\text{サ}}$$

である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群 (解答群中の C は積分定数。)

Ⓐ $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

Ⓑ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

Ⓒ $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

Ⓓ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

Ⓔ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Ⓕ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Ⓖ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$

Ⓖ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

- (4) F と G および 2 直線 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5}{4}\pi$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに
1 回転させてできる立体の体積は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi^2 + \left(\boxed{\text{セ}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \right) \pi$$

である。

(以 上)

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

記入上の注意

マークシート解答は、鉛筆でマークしたものを機械が直接読みとって採点する。したがって解答はHBの黒鉛筆でマークすること(万年筆、ボールペン、シャープペンシルなどを使用しないこと)。

① 記入例 アの解答を3にマークする場合。

正しいマークの例

ア	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

悪いマークの例

ア	①	②		④	⑤	枠外にはみ出してマークしないこと。
ア	①	②		④	⑤	枠全体をマークするようにしなさい。
ア	①	②	③	④	⑤	○でかこんでマークしないこと。
ア	①	②	✕	④	⑤	✕を書いてマークしないこと。

② 解答を訂正する場合は、消しゴムでよく消してから、あらためてマークすること。

③ 解答用紙をよごしたり、折りまげたりしないこと。

④ 問題に指定された数よりも多くマークしないこと。

