

【I】

(1)

$$B(\alpha, \beta, \gamma) (\beta > 0, \gamma > 0)$$

とおくと、Bから xy 平面に下した垂線の長さは3であるので、 $\gamma > 0$ より $\gamma = 3$ となる。また、線分ADは x 軸に平行であるので、長方形ABCDの辺ABは x 軸に対して垂直である。よって、Aの x 座標は5であるので、 $\alpha = 5$ となる。また、ABの長さは5であるので、2点間の距離を計算すると、

$$\begin{aligned} AB &= 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(5-5)^2 + (\beta-0)^2 + (3-0)^2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \beta^2 + 9 &= 25 \\ \Leftrightarrow \beta^2 &= 16 \\ \therefore \beta &= \pm 4 \end{aligned}$$

となる。 $\beta > 0$ であることから、 $\beta = 4$ となる。以上より、

$$B(5, 4, 3)$$

である。次にCの座標について考える。AD=10より、長方形の対辺BCの長さも10となる。また、線分ADは x 軸に平行であり、線分ADとBCも平行である。したがって、Bの座標が $B(5, 4, 3)$ であることから、

$$C(-5, 4, 3)$$

と求められる。

(答) $B(5, 4, 3), C(-5, 4, 3)$

(2)

点Pから x 軸に下した垂線の足をHとおく。このとき、 x 軸と直線PH、 x 軸と直線ABはそれぞれ垂直であり、点A, B, P, Hは面ABCD上にあるので、ABとPHは平行である。よって、実数 p ($0 \leq p \leq 5$)を用いて、 $HP = \left(0, \frac{4}{5}p, \frac{3}{5}p\right)$ と表せる。ここで、実数 q ($-5 \leq q \leq 5$)

を用いて点Hの座標を $H(q, 0, 0)$ とおくと、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = \left(q, \frac{4}{5}p, \frac{3}{5}p\right)$$

となる。OP=5であるので、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{q^2 + \left(\frac{4}{5}p\right)^2 + \left(\frac{3}{5}p\right)^2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{q^2 + p^2} &= 5 \\ \therefore p^2 + q^2 &= 25 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、 $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$ であるので、

$$\begin{aligned} \cos \angle AOP &= \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{5q}{5 \cdot 5} &= \frac{1}{2} \\ \therefore q &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} p^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{75}{4} \\ \therefore p &= \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

が得られるので、 $0 \leq p \leq 5$ を考慮すると、求める点Pの座標は、

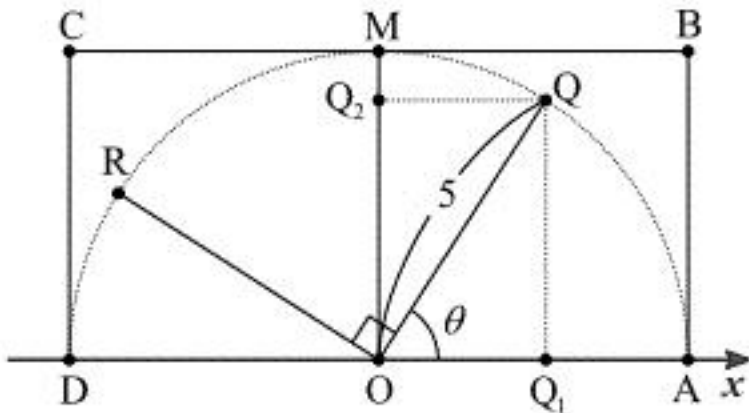
$$P\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。

(答) $P\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(3)

面ABCDと、その平面上にある中心がO、半径が5である円、点Q, Rを図示すると下図のようになる。



辺BCの中点を点Mとし、点Qから直線OA, OMに下した垂線のあしをそれぞれ点 Q_1, Q_2 とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2} \\ &= OQ_1 \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + OQ_2 \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} \\ &= 5\cos\theta \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{5} + 5\sin\theta \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{5} \\ &= \cos\theta(5, 0, 0) + \sin\theta(0, 4, 3) \\ &= (5\cos\theta, 4\sin\theta, 3\sin\theta) \end{aligned}$$

となる。また、同様に

$$\overrightarrow{OR} = (-5\sin\theta, 4\cos\theta, 3\cos\theta)$$

となるため、

$$\begin{aligned} Q_0(5\cos\theta, 4\sin\theta, 0) \\ R_0(-5\sin\theta, 4\cos\theta, 0) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} Q_0R_0^2 &= (-5\sin\theta - 5\cos\theta)^2 + (4\cos\theta - 4\sin\theta)^2 + 0^2 \\ &= 25 + 50\sin\theta\cos\theta + 16 - 32\sin\theta\cos\theta \\ &= 41 + 18\sin\theta\cos\theta \\ &= 41 + 9\sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。よって $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から、 $0 < 2\theta < \pi$ であり、 $0 < \sin 2\theta \leq 1$ となるので、

$$\begin{aligned} 41 < Q_0R_0^2 &\leq 50 \\ \Leftrightarrow \sqrt{41} < Q_0R_0 &\leq 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sqrt{41} < Q_0R_0 \leq 5\sqrt{2}$

〔Ⅱ〕

(1)

球の取り出し方は全部で ${}_{20}C_5$ 通りで、これらは同様に確からしい。 $x=2$ かつ $y=19$ となるとき、袋の中には 1, 2, 19, 20 の数が書かれた球が残り、3 から 18 までの数が書かれた 16 個の球の中から 5 個が取り出される。よって、求める確率は、

$$\frac{{}_{16}C_5}{{}_{20}C_5} = \frac{91}{323}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{91}{323}$$

(2)

$x=4$ となるとき、1, 2, 3 の数が書かれた 3 個の球の中から 2 個、5 から 20 までの数が書かれた 16 個の球の中から 3 個が取り出される。よって、求める確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_{16}C_3}{{}_{20}C_5} = \frac{35}{323}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{323}$$

(3)

球の取り出し方の条件から x, y が取りうる値の範囲は、

$$2 \leq x \leq 7, \quad 14 \leq y \leq 19$$

である。よって、 $y-x=15$ となるのは

$$(x, y) = (2, 17), (3, 18), (4, 19)$$

の場合に分けられる。

[1] $(x, y) = (2, 17)$ のとき

このとき、3 から 16 までの数が書かれた 14 個の球の中から 3 個、18, 19, 20 の数が書かれた 3 個の球の中から 2 個が取り出される。よって、 $(x, y) = (2, 17)$ である確率は、

$$\frac{{}_{14}C_3 \cdot {}_3C_2}{{}_{20}C_5} = \frac{91}{1292}$$

となる。

[2] $(x, y) = (3, 18)$ のとき

このとき、1, 2 の数が書かれた 2 個の球の中から 1 個、4 から 17 までの数が書かれた 14 個の球の中から 3 個、19, 20 の数が書かれた 2 個の球の中から 1 個が取り出される。よって、 $(x, y) = (3, 18)$ である確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_{14}C_3 \cdot {}_2C_1}{{}_{20}C_5} = \frac{91}{969}$$

となる。

[3] $(x, y) = (4, 19)$ のとき

このとき、1, 2, 3 の数が書かれた 3 個の球の中から 2 個、5 から 18 までの数が書かれた 14 個の球の中から 3 個が取り出される。よって、 $(x, y) = (4, 19)$ である確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_{14}C_3}{{}_{20}C_5} = \frac{91}{1292}$$

となる。

以上、[1], [2], [3] より、 $y-x=15$ となる確率は、

$$\frac{91}{1292} + \frac{91}{969} + \frac{91}{1292} = \frac{455}{1938}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{455}{1938}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - (a+2)x + 2a \\ &= (x-a)(x-2) \end{aligned}$$

となる。 a が負の定数であることを考慮すると、 $y=f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	a	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表より、極大値は $f(a) = -\frac{1}{6}a^3 + a^2 - \frac{7}{6}$ 、極小値は $f(2) = 2a - \frac{5}{2}$ である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{極大値: } x=a \text{ のとき } -\frac{1}{6}a^3 + a^2 - \frac{7}{6} \\ \text{極小値: } x=2 \text{ のとき } 2a - \frac{5}{2} \end{cases}$$

(2)

$y=f(x)$ が x 軸と接するとき、 $y=f(x)$ の極値のいずれかが 0 となる。

[1] 極大値 $f(a)$ が 0 となるとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{6}a^3 + a^2 - \frac{7}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a^2 - 7a + 7) &= 0 \\ \therefore a &= -1, \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $7 > \sqrt{21}$ より、 $\frac{7 \pm \sqrt{21}}{2} > 0$ となるので、 a が負の定数であるという条件を考慮すると、 a の値は $a = -1$ と求まる。

[2] 極小値 $f(2)$ が 0 となるとき、

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a - \frac{5}{2} &= 0 \\ \therefore a &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となるが、これは a が負の定数であるという条件を満たさず、不適である。

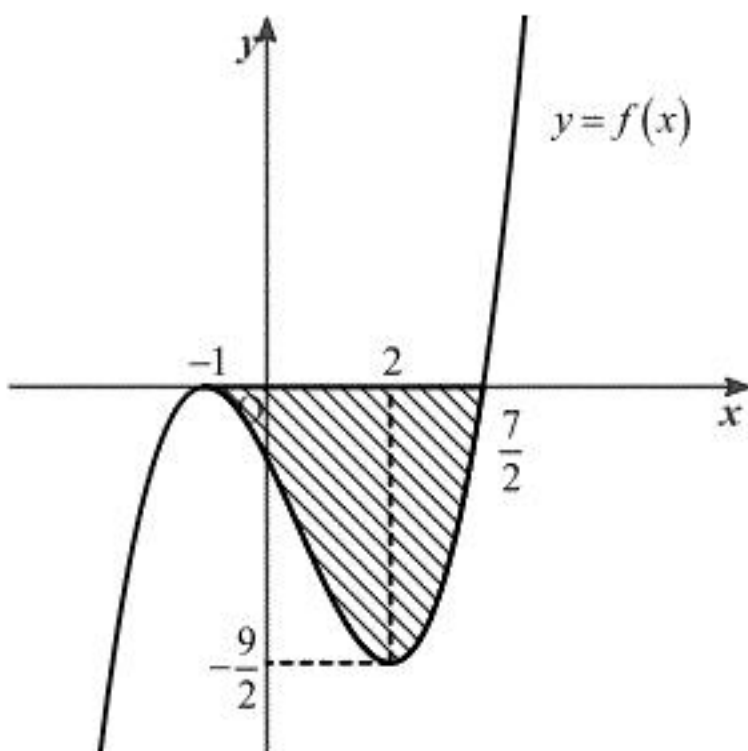
以上[1], [2]より、求める a の値は、 $a = -1$ である。また、これを $f(x)$ に代入すると、

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{6}$$

となり、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(2x-7) &= 0 \\ \therefore x &= -1, \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求められるので、(1)の増減表と合わせると、 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



よって、求める面積は上図の網掛け部分の面積に等しく、これを S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^{\frac{7}{2}} f(x) dx \\ &= -\int_{-1}^{\frac{7}{2}} \frac{1}{3}(x+1)^2 \left(x - \frac{7}{2} \right) dx \\ &= -\int_{-1}^{\frac{7}{2}} \frac{1}{3}(x+1)^2 \left\{ (x+1) - \frac{9}{2} \right\} dx \\ &= -\int_{-1}^{\frac{7}{2}} \left\{ \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{3}{2}(x+1)^2 \right\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{12}(x+1)^4 - \frac{1}{2}(x+1)^3 \right]_{-1}^{\frac{7}{2}} \\ &= -\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{9}{2} \right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{9}{2} \right)^3 \\ &= \frac{729}{64} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $a = -1$ 、面積： $\frac{729}{64}$