

〔I〕

(1)

C_1 と C_2 の方程式から y を消去して整理すると

$$\begin{aligned} x^2 &= -kx^2 + 2kx + 2 - k \\ \Leftrightarrow (k+1)x^2 - 2kx + k - 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $k+1>0$ より、 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることは、2 次方程式①が 2 つの異なる実数解をもつことと同値である。すなわち、①の判別式 D が正であることを示せばよい。ここで、

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+1)(k-2) = k+2$$

であり、 k は正の実数であるから、 $\frac{D}{4} > 0$ 、すなわち $D > 0$ とわかる。したがって、 C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わる。

(証明終)

(2)

実数 α, β ($\alpha < \beta$) を用いて、 C_1 と C_2 の 2 つの交点の座標を $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ とおくと、2 つの

交点の中点の座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ と表される。ここで、 $k=3$ のとき、①は

$$4x^2 - 6x + 1 = 0$$

となるから、 α と β は 2 次方程式 $4x^2 - 6x + 1 = 0$ の 2 つの異なる実数解である。よって、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となるから、 C_1 と C_2 の 2 つの交点の中点の座標は $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$ である。

(答) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$

(3)

いま、 α と β は①の異なる 2 つの実数解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2k}{k+1}, \alpha\beta = \frac{k-2}{k+1} \quad (\because k \neq -1)$$

である。よって、 C_1 と C_2 の 2 つの交点の中点の y 座標は

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{\frac{4k^2}{(k+1)^2} - 2 \cdot \frac{k-2}{k+1}}{2} = \frac{k^2 + k + 2}{(k+1)^2}$$

となる。これが $\frac{3}{2}$ に等しいから

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{k^2 + k + 2}{(k+1)^2} \\ \Leftrightarrow 3(k+1)^2 &= 2(k^2 + k + 2) \\ \Leftrightarrow k^2 + 4k - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -2 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。 k は正の実数であるから、 $k = -2 + \sqrt{5}$ である。

(答) $k = -2 + \sqrt{5}$

〔Ⅱ〕

(1)

硬貨を投げ始める前は $x=1$ であるから、硬貨を1回投げて表が出れば $x=2$ となり、裏が出れば $x=0$ となる。したがって

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 0, c_1 = \frac{1}{2}, d_1 = 0, e_1 = 0$$

である。また、 $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}, e_{n+1}$ を、 a_n, b_n, c_n, d_n, e_n を用いて表すと

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + e_n \\ e_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \end{cases}$$

となる。よって、求める値は

$$a_2 = \frac{1}{2}b_1 = 0$$

$$b_2 = a_1 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}d_1 = 0$$

$$d_2 = \frac{1}{2}c_1 + e_1 = \frac{1}{4}$$

$$e_2 = \frac{1}{2}d_1 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_2 = 0, b_2 = \frac{3}{4}, c_2 = 0, d_2 = \frac{1}{4}, e_2 = 0$$

(2)

(1)と同様に考えて

$$a_3 = \frac{1}{2}b_2 = \frac{3}{8}$$

$$b_3 = a_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = \frac{1}{2}c_2 + e_2 = 0$$

$$e_3 = \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_3 = \frac{3}{8}, b_3 = 0, c_3 = \frac{1}{2}, d_3 = 0, e_3 = \frac{1}{8}$$

(3)

(1)と同様に考えて

$$a_4 = \frac{1}{2}b_3 = 0$$

$$b_4 = a_3 + \frac{1}{2}c_3 = \frac{5}{8}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}d_3 = 0$$

$$d_4 = \frac{1}{2}c_3 + e_3 = \frac{3}{8}$$

$$e_4 = \frac{1}{2}d_3 = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_4 = 0, b_4 = \frac{5}{8}, c_4 = 0, d_4 = \frac{3}{8}, e_4 = 0$$

(4)

(1)で求めた漸化式より

$$\begin{aligned} b_{2(n+1)} &= a_{2n+1} + \frac{1}{2}c_{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}b_{2n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}b_{2n} + \frac{1}{2}d_{2n} \right) \\ &= \frac{3}{4}b_{2n} + \frac{1}{4}d_{2n} \end{aligned}$$

である。また、同様に考えて

$$\begin{aligned} d_{2(n+1)} &= \frac{1}{2}c_{2n+1} + e_{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}b_{2n} + \frac{1}{2}d_{2n} \right) + \frac{1}{2}d_{2n} \\ &= \frac{1}{4}b_{2n} + \frac{3}{4}d_{2n} \end{aligned}$$

である。これらの和をとると

$$b_{2(n+1)} + d_{2(n+1)} = b_{2n} + d_{2n}$$

となり、 $b_2 + d_2 = 1$ であるから、 $n=1, 2, 3, \dots$ について

$$b_{2n} + d_{2n} = 1$$

であるとわかる。したがって、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= b_{2(n+1)} \\ &= \frac{3}{4}b_{2n} + \frac{1}{4}(1 - b_{2n}) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。この漸化式を変形すると

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

となり、 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ であるから、数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

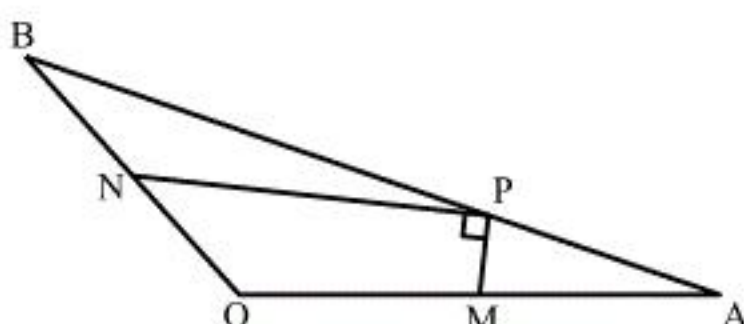
と求められる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

〔Ⅲ〕

(1)

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



$\angle MPN$ が直角であるから、 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ である。ここで、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NP} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \\ &= \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{9} |\vec{a}|^2 + \frac{7}{36} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{18} |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3^2 + \frac{7}{36} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{18} \cdot 2^2 \\ &= \frac{7}{9} + \frac{7}{36} \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ より、

$$\frac{7}{9} + \frac{7}{36} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -4$$

である。

(答) -4

(2)

$\overrightarrow{OQ} = t \overrightarrow{OA} = t \vec{a}$, $\overrightarrow{OR} = (1-t) \overrightarrow{OB} = (1-t) \vec{b}$ であるから、(1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \left\{ t \vec{a} - \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \right\} \cdot \left\{ (1-t) \vec{b} - \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \right\} \\ &= \left\{ \left(t - \frac{2}{3} \right) \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} \right\} \cdot \left\{ -\frac{2}{3} \vec{a} + \left(\frac{2}{3} - t \right) \vec{b} \right\} \\ &= -\frac{2}{3} \left(t - \frac{2}{3} \right) |\vec{a}|^2 + \left(-t^2 + \frac{4}{3} t - \frac{2}{9} \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{1}{3} t - \frac{2}{9} \right) |\vec{b}|^2 \\ &= -\frac{2}{3} \left(t - \frac{2}{3} \right) \cdot 3^2 + \left(-t^2 + \frac{4}{3} t - \frac{2}{9} \right) \cdot (-4) + \left(\frac{1}{3} t - \frac{2}{9} \right) \cdot 2^2 \\ &= (-6t + 4) + \left(4t^2 - \frac{16}{3} t + \frac{8}{9} \right) + \left(\frac{4}{3} t - \frac{8}{9} \right) \\ &= 4t^2 - 10t + 4 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \frac{10}{9}$ であるから

$$\begin{aligned} 4t^2 - 10t + 4 &= \frac{10}{9} \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 10t + \frac{26}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow 18t^2 - 45t + 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-1)(6t-13) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3}, \frac{13}{6} \end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ より、求める t の値は $t = \frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{1}{3}$