

〔Ⅰ〕

(1)①

この等差数列を $\{\alpha_n\}$ とおくと、 $\{\alpha_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned}\alpha_n &= a + (n-1)d \\ &= nd + (a-d)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S_{10} &= \sum_{k=1}^{10} \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{kd + (a-d)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \cdot d + 10 \cdot (a-d) \\ &= 10a + 45d\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad S_{10} = 10a + 45d$$

②

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n \{kd + (a-d)\} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)d + n(a-d) \\ &= na + \frac{1}{2}(n-1)nd\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}S_{20} &= 20a + 190d \\ S_{30} &= 30a + 435d\end{aligned}$$

となる。これと①より、

$$\begin{aligned}\frac{S_{20}}{S_{10}} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{20a + 190d}{10a + 45d} &= 4 \\ \Leftrightarrow d &= 2a\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{S_{30}}{S_{10}} &= \frac{30a + 435d}{10a + 45d} \\ &= \frac{900a}{100a} \\ &= 9\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{S_{30}}{S_{10}} = 9$$

(2)

この等比数列を $\{\beta_n\}$ とおくと、 $\{\beta_n\}$ の一般項は、

$$\beta_n = r^{n-1}b$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^n r^{k-1}b \\ &= \frac{1-r^n}{1-r}b\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\frac{T_{20}}{T_{10}} &= \frac{\frac{1-r^{20}}{1-r}b}{\frac{1-r^{10}}{1-r}b} \\ &= 1 + r^{10} \\ \frac{T_{30}}{T_{10}} &= \frac{\frac{1-r^{30}}{1-r}b}{\frac{1-r^{10}}{1-r}b} \\ &= 1 + r^{10} + r^{20}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{T_{20}}{T_{10}} &= p \\ \Leftrightarrow 1 + r^{10} &= p\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}r^{20} &= (r^{10})^2 \\ &= (p-1)^2 \\ &= p^2 - 2p + 1\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{T_{30}}{T_{10}} &= 1 + r^{10} + r^{20} \\ &= p + (p^2 - 2p + 1) \\ &= p^2 - p + 1\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{T_{30}}{T_{10}} = p^2 - p + 1$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 2px$$

である。よって、 $y = f(x)$ のグラフが $x = 2$ で x 軸と接していることから、

$$f(2) = 0, f'(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4p + q = 0, 12 - 4p = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 3, q = 4$$

である。

(答) $p = 3, q = 4$

(2)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$= (x+1)(x-2)^2$$

である。よって、

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 2$$

である。

(答) $x = -1, 2$

(3)

(1)より、

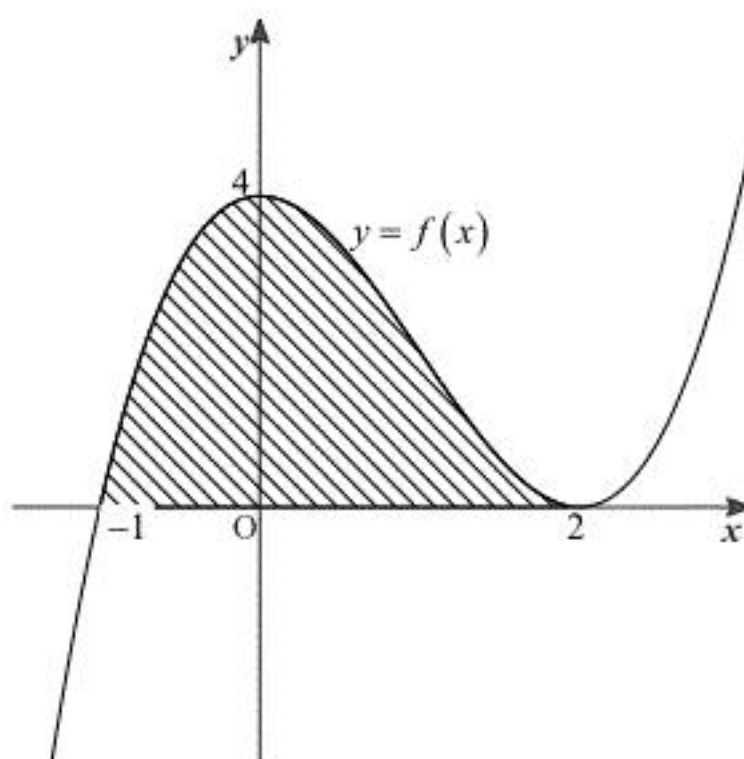
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x-2)$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

よって、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形は次図のようになる。



上図より、求める面積は、

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{27}{4}$$

である。

(答) $\frac{27}{4}$

【Ⅲ】

(1) 3桁の整数 abc が9の倍数であることは、 $a+b+c$ が9の倍数であることと同値である。また、
$$a+b+c < 3 \cdot 8 = 24$$
より、 abc が9の倍数のとき、
$$a+b+c = 9, 18$$
に限られる。
[1] $a+b+c=9$ のとき
引いた3枚の札の数字は、 $(1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$ である。
[2] $a+b+c=18$ のとき
引いた3枚の札の数字は、 $(3, 7, 8), (4, 6, 8), (5, 6, 7)$ である。
以上、[1], [2], [3]より、引いた3枚の札の数字のパターンは6通りある。よって、 abc が9の倍数となるような (a, b, c) の組み合わせは、順列を考えると、
$${}_3P_3 \cdot 6 = 36 \text{通り}$$
となる。 (a, b, c) の組み合わせは全部で ${}_8P_3$ 通りで、それらは同様に確からしいことから、求める確率は、
$$\frac{{}_3P_3 \cdot 6}{{}_8P_3} = \frac{3}{28}$$
である。

(答) $\frac{3}{28}$

(2)①
以下、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ に置き換えて考える。これらの文字は1以上8以下の自然数であり、どの2つの文字も重複しない。このとき、
$$F = 10\alpha + \beta + 3\gamma + \sqrt{\delta} - \frac{60}{\varepsilon}$$
となる。 $10\alpha + \beta + 3\gamma$ は常に整数であるから、 $\sqrt{\delta}, \frac{60}{\varepsilon}$ がどちらも整数となればよい。このとき、 δ は平方数より、
$$\delta = 1, 4$$
となる。また、 ε は60の約数であるから、
$$\varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
となる。したがって、 ε は δ で選ばれた数字以外から選べばよいので、求める確率は
$$\frac{2}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{28}$$
となる。

(答) $\frac{5}{28}$

②
 ε について場合分けする。
[1] $\varepsilon=1$ のとき
①より $\delta=4$ である。よって、 F が最小となるのは、
$$\alpha=2, \beta=5, \gamma=3$$
のときであり、
$$F = -24$$
となる。
[2] $\varepsilon \geq 2$ のとき
このとき、
$$F > 10\alpha - \frac{60}{\varepsilon} \geq 10 \cdot 1 - \frac{60}{2} = -20$$
となる。
以上、[1], [2]より、 F の値が整数であるときの最小値は、
$$-24$$
である。

(答) -24

(3)
 $-m = x^2 + (3m-1)x + 2n$ 、すなわち $x^2 + (3m-1)x + m + 2n = 0$ が実数解を持たないような (m, n) の組み合わせを考える。この2次方程式の判別式 D は、
$$D = (3m-1)^2 - 4(m+2n) = 9m^2 - 10m + 1 - 8n$$
であるから、
$$D < 0$$
$$\Leftrightarrow 9m^2 - 10m + 1 < 8n \quad \cdots \text{①}$$
となればよい。ここで、
$$f(m) = 9m^2 - 10m + 1$$
とする。
[1] $m=1$ のとき
$$f(1) = 0$$
であるから、①を満たす n は、
$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$
の8通りある。
[2] $m=2$ のとき
$$f(2) = 17$$
であるから、①を満たす n は、
$$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$
の6通りある。
[3] $m=3$ のとき
$$f(3) = 52$$
であるから、①を満たす n は、
$$n = 7, 8$$
の2通りある。
[4] $m \geq 4$ のとき
$$f(m) \geq f(4) = 105 > 8 \cdot 8 \geq 8n$$
となるから不適である。
以上、[1], [2], [3], [4]より、2つの関数が共有点を持たないような (m, n) の組み合わせは16通りである。 (m, n) の組み合わせは $8 \cdot 8$ 通りで、それらは同様に確からしいことから、求める確率は、
$$\frac{16}{8 \cdot 8} = \frac{1}{4}$$
である。

(答) $\frac{1}{4}$