

【I】

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ |
|     | 1 | 0 | 4 | 5 | 8 | 0 | 9 | 5 | 4 | 6 | 5 |
| (2) | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト |   |   |
|     | 6 | 5 | 8 | 2 | 8 | 5 | 1 | 8 | 7 |   |   |

【解説】

(1)

題意より

$$a=97q+r$$

であり、二項定理により

$$\begin{aligned}a^{10} &= (97q+r)^{10} \\ &= \sum_{k=0}^{10} {}^{10}C_k (97q)^{10-k} r^k \\ &= (97q)^{10} + 10 \cdot (97q)^9 r + 45 \cdot (97q)^8 r^2 + \cdots + 45 \cdot (97q)^2 r^8 + 10 \cdot (97q) r^9 + r^{10}\end{aligned}$$

となるから、 $a^{10}$  を 97 で割った余りは、 $r^{10}$  を 97 で割った余りに等しい。また、

$$2020=97 \cdot 20+80$$

である。80 の 2 乗を 97 で割った余りは

$$80^2=97 \cdot 65+95$$

から、95 となる。よって、

$$\begin{aligned}80^{10} &= (80^2)^5 \\ &= (97 \cdot 65+95)^5\end{aligned}$$

が成立し、

$$95^2=97 \cdot 93+4$$

から

$$\begin{aligned}95^5 &= 95 \cdot (95^2)^2 \\ &= 95 \cdot (97 \cdot 93+4)^2\end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $2020^{10}$  を 97 で割った余りは  $80^{10}$  を 97 で割った余りに等しく、それは

$95^5$  を 97 で割った余りに等しく、それは  $95 \cdot 4^2$  を 97 で割った余りに等しいため、

$$95 \cdot 4^2=97 \cdot 15+65$$

より、 $2020^{10}$  を 97 で割った余りは 65 である。

(2)

直線  $\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned}3x+4y-10 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるから、 $O$  を通り  $\ell$  に垂直な直線は、原点を通り傾きが  $\frac{4}{3}$  であるため、直線の方程式は

$$y=\frac{4}{3}x$$

である。よってこの直線と  $\ell$  との交点の  $x$  座標は

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}x &= -\frac{3}{4}x+\frac{5}{2} \\ \therefore x &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

であるから、求める交点の座標は

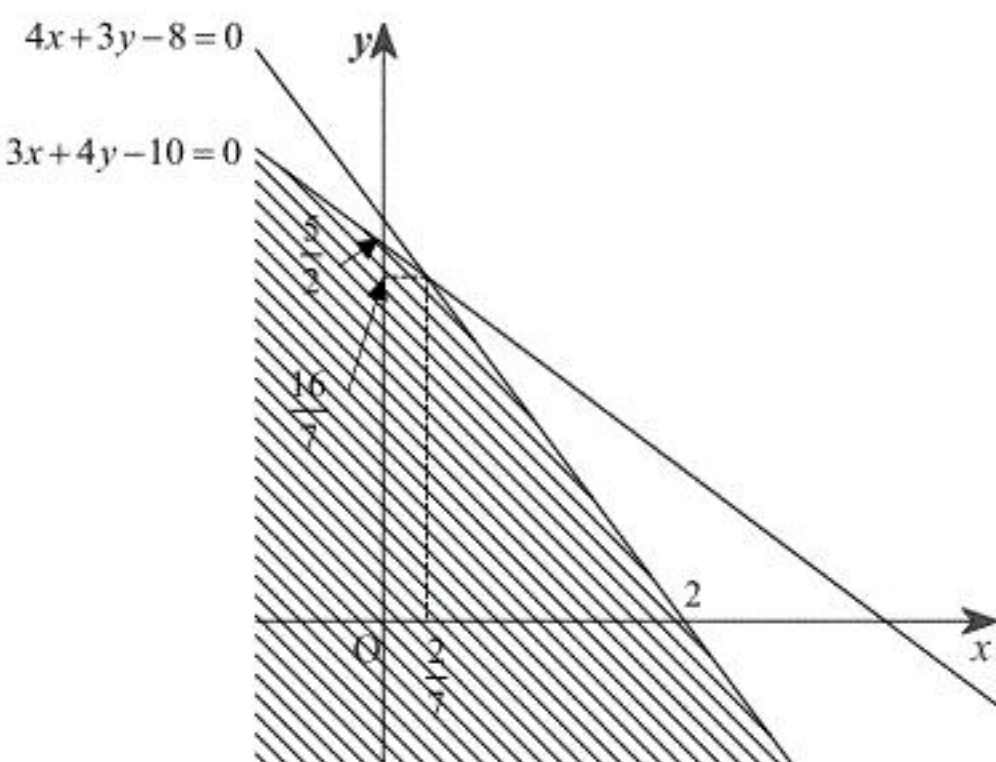
$$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

である。 $O$  と  $\ell$  の距離は、 $O$  と  $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$  の距離であるから、求める距離は、

$$\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=2$$

である。次に、題意の不等式で示される領域  $D$  を図示すると下図の斜線部分のようになる。

ただし境界は全て含む。



ここで  $O$  を中心とし、 $D$  に含まれる円の半径の最大値は、原点と 2 直線

$3x+4y-10=0$ ,  $4x+3y-8=0$  の距離のうち大きくない方である。原点と直線  $3x+4y-10=0$

の距離は 2、原点と直線  $4x+3y-8=0$  の距離は

$$\frac{|4 \cdot 0+3 \cdot 0-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}$$

であるから、求める円の半径の最大値は  $\frac{8}{5}$  である。また、点  $(x, y)$  が領域  $D$  を動く時の  $x+y$

の最大値について、 $k$  を実数として

$$\begin{aligned}x+y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -x+k \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

とし、直線  $\textcircled{1}$  が上図の斜線部分と交点を持つときの  $k$  の最大値を求めることを考える。3 つ

の直線  $y=-x+k$ ,  $3x+4y-10=0$ ,  $4x+3y-8=0$  の傾きはそれぞれ  $-1$ ,  $-\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{4}{3}$  で  $-\frac{4}{3}<-1<-\frac{3}{4}$

であるから、 $\textcircled{1}$  が 2 直線  $3x+4y-10=0$ ,  $4x+3y-8=0$  の交点  $\left(\frac{2}{7}, \frac{16}{7}\right)$  を通るとき  $k$  が最大値

をとり、このとき

$$\begin{aligned}\frac{16}{7} &= -\frac{2}{7}+k \\ \Leftrightarrow k &= \frac{18}{7}\end{aligned}$$

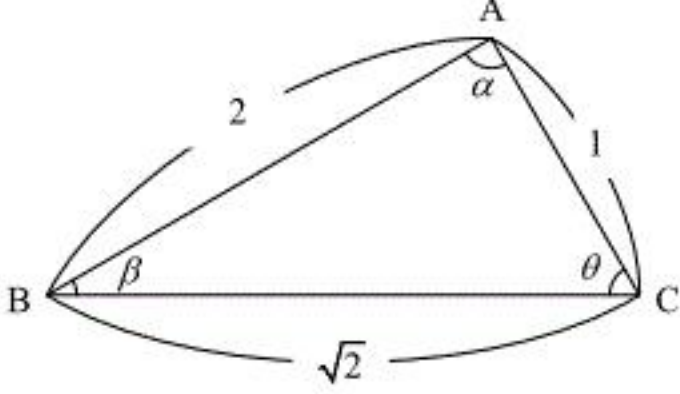
であるから、 $x+y$  の最大値は  $\frac{18}{7}$  である。

【Ⅱ】

【解答】

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ |
| － | 2 | 4 | 8 | 7 | － | 3 | 4 | － | 6 | 7 | 9 | 1 | 4 |
| ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ |   |   |   |   |
| 1 | 7 | 3 | 2 | 5 | 4 | 6 | 5 | 7 | 4 |   |   |   |   |

【解説】



三角形 ABC において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \\ &= \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。また、 $0 < \theta < \pi$  より  $\sin\theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{4}\end{aligned}$$

である。三角形 ABC において正弦定理より

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AB}{\sin\theta} \\ &= \frac{8}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

となる。よって

$$R = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore R^2 = \frac{8}{7}$$

・・・①

である。ここで、倍角公式より

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

であり、題意から

$$|\overline{AB}| = 2, |\overline{AC}| = 1, |\overline{BC}| = \sqrt{2}, |\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = R$$

・・・②

が成立するため、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 &= |\overline{OB} - \overline{OA}|^2 \\ &= |\overline{OB}|^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + |\overline{OA}|^2\end{aligned}$$

に①②を代入すると

$$\begin{aligned}2^2 &= R^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + R^2 \\ \Leftrightarrow 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} &= 2 \cdot \frac{8}{7} - 4 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= \frac{-6}{7}\end{aligned}$$

・・・③

である。同様に、

$$\begin{aligned}|\overline{AC}|^2 &= |\overline{OC} - \overline{OA}|^2 \\ &= |\overline{OC}|^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} + |\overline{OA}|^2\end{aligned}$$

に①②を代入すると

$$\begin{aligned}1^2 &= R^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} + R^2 \\ \Leftrightarrow 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} &= 2 \cdot \frac{8}{7} - 1 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \frac{9}{14}\end{aligned}$$

・・・④

であり、

$$\begin{aligned}|\overline{BC}|^2 &= |\overline{OC} - \overline{OB}|^2 \\ &= |\overline{OC}|^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} + |\overline{OB}|^2\end{aligned}$$

に①②を代入すると

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^2 &= R^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} + R^2 \\ \Leftrightarrow 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= 2 \cdot \frac{8}{7} - 2 \\ \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot \overline{OC} &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

・・・⑤

である。ここで、 $\overline{OC} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$  とおくと

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \overline{OA} \cdot (x\overline{OA} + y\overline{OB}) \\ &= x|\overline{OA}|^2 + y\overline{OA} \cdot \overline{OB}\end{aligned}$$

となり、ここに①②③④を代入すると

$$\frac{9}{14} = \frac{8}{7}x - \frac{6}{7}y$$

・・・⑥

となる。同様に、

$$\begin{aligned}\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= \overline{OB} \cdot (x\overline{OA} + y\overline{OB}) \\ &= x\overline{OA} \cdot \overline{OB} + y|\overline{OB}|^2\end{aligned}$$

となり、ここに①②③⑤を代入すると

$$\frac{1}{7} = -\frac{6}{7}x + \frac{8}{7}y$$

・・・⑦

となる。よって⑥⑦より

$$(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

である。線分 OC と線分 AB の交点を D とすると、3 点 O, D, C は一直線上にあるから  $k$  を実数として

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= k\overline{OC} \\ &= k\left(\frac{3}{2}\overline{OA} + \frac{5}{4}\overline{OB}\right) \\ &= \frac{3}{2}k\overline{OA} + \frac{5}{4}k\overline{OB}\end{aligned}$$

とおくことが出来て、D は線分 AB 上の点でもあるから

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}k + \frac{5}{4}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{4}{11}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{cases} \overline{OD} = \frac{4}{11}\overline{OC} \\ \overline{OD} = \frac{6}{11}\overline{OA} + \frac{5}{11}\overline{OB} \end{cases}$$

が成立するため、D は OC を 4:7 に内分し、AB を 5:6 に内分する。よって

$$\frac{BD}{AD} = \frac{6}{5}, \frac{CD}{OD} = \frac{7}{4}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ |   |   |
|     | 1 | 1 | 1 |   |   |
| (2) | エ | オ | カ |   |   |
|     | 3 | 1 | 1 |   |   |
| (3) | キ | ク | ケ |   |   |
|     | 6 | 1 | 1 |   |   |
| (4) | コ | サ | シ | ス |   |
|     | 1 | 6 | 5 | 5 |   |
| (5) | セ | ソ | タ | チ |   |
|     | 3 | 4 | 5 | 5 |   |
| (6) | ツ | テ | ト | ナ |   |
|     | 3 | 1 | 4 | 4 |   |
| (7) | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ |
|     | 1 | 9 | 1 | 5 | 5 |

【解説】

- (1)
- 2個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_2$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、取り出した玉が2個とも赤玉である場合の数は ${}_4C_2$ (通り)
- であるから、求める確率は
$$\frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{11}$$
- である。
- (2)
- 2個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_2$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、取り出した玉に書かれた2つの数の和が5である場合の数を考える。2つの玉に書かれている数字の組み合わせは以下の2パターンが考えられる。
- ①1と書かれた玉が1個、4と書かれた玉が1個
- ②2と書かれた玉が1個、3と書かれた玉が1個
- ①となる場合の数は $3\cdot 3=9$ (通り)
- であり、②も同様に9(通り)である。これらは互いに排反であるから、求める確率は
$$\frac{9+9}{{}_{12}C_2}=\frac{3}{11}$$
- である。
- (3)
- 2個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_2$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、取り出した2つの玉の色が異なり、かつ、書かれた2つの数が異なる場合の数を考える。まず玉の色の選び方は、3色から2色を選ぶため ${}_3C_2$ (通り)
- であり、2色を決めた後で書かれた2つの数が異なる場合の数は、すべての場合から同じ数が書かれた球を取り出す場合を除いて $4^2-4$ (通り)
- であるから、求める確率は
$$\frac{{}_3C_2\cdot (4^2-4)}{{}_{12}C_2}=\frac{6}{11}$$
- である。
- (4)
- 3個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_3$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、取り出した玉の色がすべて異なる場合の数は、各色から1個ずつ玉を選ぶと考えて $4^3$ (通り)
- であるから、求める確率は
$$\frac{4^3}{{}_{12}C_3}=\frac{16}{55}$$
- である。
- (5)
- 3個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_3$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、余事象を考える。取り出した玉に書かれた3つの数の中に4が1つも含まれない場合の数は、4と書かれた玉以外の9個の玉から3個取り出すことを考えて ${}_9C_3$ (通り)
- であるから、求める確率は
$$1-\frac{{}_9C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{34}{55}$$
- である。
- (6)
- 3個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_3$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、余事象を考える。取り出した玉に書かれた3つの数の積が4の倍数でない場合の数を考える。これは以下の2パターンが考えられる。
- ①3個とも全て奇数が書かれた玉が出る
- ②2と書かれた玉が1個出て、残りの2個は奇数が書かれた玉が出る
- ①の場合の数は、奇数が書かれている6個の玉から3個を選ぶと考えて ${}_6C_3$ (通り)
- であり、②の場合の数はどの色で2が出るかで3通り、残りの2個は奇数が書かれている6個の玉から2個を選ぶと考えて ${}_6C_2$ (通り)であるから $3\cdot {}_6C_2$ (通り)
- である。これらは互いに排反であるから、求める確率は
$$1-\frac{{}_6C_3+3\cdot {}_6C_2}{{}_{12}C_3}=\frac{31}{44}$$
- である。
- (7)
- 3個の玉の取り出し方は全部で ${}_{12}C_3$ (通り)
- であり、これらは同様に確からしい。ここで、「取り出した玉に書かれた3つの数の積が4の倍数である」という事象を $A$ 、「3つの数の中に4が含まれない」という事象を $B$ とすると、(6)より
$$P(A)=\frac{31}{44}$$
- である。取り出した玉に書かれた3つの数の積が4の倍数であり、かつ3つの数の中に4が含まれないような玉の取り出し方は以下の2パターンが考えられる。
- ①2と書かれた玉が2個出て、残りの1個は奇数が書かれた玉が出る
- ②2と書かれた玉が3個出る
- ①の場合の数はどの2色で2が出るかで ${}_3C_2$ (通り)、残りの1個は奇数が書かれている6個の玉から1個を選ぶと考えて6通りであるから ${}_3C_2\cdot 6$ (通り)
- であり、②の場合の数は1通りである。これらは互いに排反であるから、
$$P(A\cap B)=\frac{{}_3C_2\cdot 6+1}{{}_{12}C_3}$$
$$=\frac{19}{220}$$
- である。よって求める条件付き確率は
$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
$$=\frac{\frac{19}{220}}{\frac{31}{44}}$$
$$=\frac{19}{155}$$
- である。

【Ⅳ】

【解答】

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ |   |   |  |
| 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 |   |   |  |
| サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ |  |
| 2 | ② | ④ | － | 1 | 1 | 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 0 |  |

【解説】

$f(x)<0$ となるのは

$$\begin{aligned}f(x)<0\\&\Leftrightarrow x^4-7x^3+15x^2-9x<0\\&\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)^2<0\\&\Leftrightarrow x(x-1)<0\\&\Leftrightarrow 0<x<1\end{aligned}$$

より、 $0<x<1$ のときである。また

$$f'(x)=4x^3-21x^2+30x-9$$

より曲線  $C$  の、点  $A(1, f(1))$  における接線  $\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned}y&=f'(1)(x-1)+f(1)\\&\Leftrightarrow y=4(x-1)\\&\Leftrightarrow y=4x-4\end{aligned}$$

である。ここで、方程式  $f'(x)=4$  を解くと

$$\begin{aligned}f'(x)&=4\\&\Leftrightarrow 4x^3-21x^2+30x-9=4\\&\Leftrightarrow (x-1)^2(4x-13)=0\\&\Leftrightarrow x=1, \frac{13}{4}\end{aligned}$$

となるから、 $f'(x)=4$  となる  $x$  のうちで最も大きいのは

$$x=\frac{13}{4}$$

である。ここで、傾きが4に等しい接線は点  $(1, f(1))$ 、点  $\left(\frac{13}{4}, f\left(\frac{13}{4}\right)\right)$  における接線であり、

これら2本の接線は重複する可能性がある。ところが、点  $\left(\frac{13}{4}, f\left(\frac{13}{4}\right)\right)$  は  $\ell$  上にはないから、

このようなことは起こりえない。したがって、傾きが4に等しい  $C$  の接線はちょうど2本ある。ここで、

$$\begin{aligned}g(x)&=f'(x)\\&=4x^3-21x^2+30x-9\end{aligned}$$

とすると、

$$g'(x)=12x^2-42x+30$$

となるから、方程式  $g'(x)=0$  を解くと

$$\begin{aligned}g'(x)&=0\\&\Leftrightarrow 12x^2-42x+30=0\\&\Leftrightarrow (x-1)(2x-5)=0\\&\Leftrightarrow x=1, \frac{5}{2}\end{aligned}$$

であり、 $g(x)$  の増減表は以下ようになる。

|         |            |        |            |                      |            |
|---------|------------|--------|------------|----------------------|------------|
| $x$     | ...        | 1      | ...        | $\frac{5}{2}$        | ...        |
| $g'(x)$ | +          | 0      | -          | 0                    | +          |
| $g(x)$  | $\nearrow$ | 4 (極大) | $\searrow$ | $-\frac{11}{4}$ (極小) | $\nearrow$ |

よって、増減表より

$g(1)$  は、 $g(x)$  の極大値であるが、最大値ではない

$g\left(\frac{5}{2}\right)$  は、 $g(x)$  の極小値であるが、最小値ではない

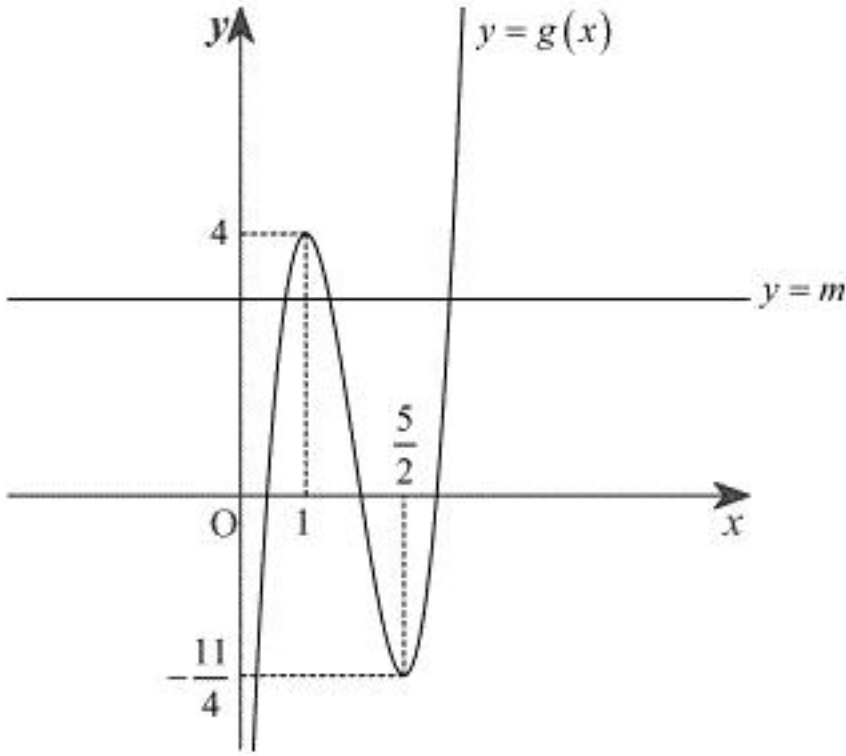
ということが言える。ここで、傾きが  $m$  に等しい  $C$  の接線が、ちょうど1本となるためには3次方程式

$$g(x)=m$$

が実数解を1つしかもたないような  $m$  の範囲を求めればよいから、2つのグラフ

$$\begin{cases}y=g(x)\\y=m\end{cases}$$

が1つの交点を持つための  $m$  の範囲を考えればよい。2つのグラフは下図のようになる。



よってグラフより、求める  $m$  の範囲は

$$m<-\frac{11}{4}, m>4$$

となる。 $0<x<1$ のとき  $f(x)<0$  であるから、 $C$  と2直線  $x=0, x=1$  および  $x$  軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1\{-f(x)\}dx&=\int_0^1(-x^4+7x^3-15x^2+9x)dx\\&=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{7}{4}x^4-5x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^1\\&=\frac{21}{20}\end{aligned}$$

である。

〔解答〕

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ |
| 1 | 2 | 4 | 2 | 4 | ⑤ | 4 |
| ク | ケ | コ | サ | シ | ス |   |
| 7 | 2 | 1 | ⑤ | ⑨ | 4 |   |

〔解説〕

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2^4 (a_n)^2 \text{ 且 } 4)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^4 (a_1)^2 \\ &= 2^4 \\ a_3 &= 2^4 (a_2)^2 \\ &= 2^4 \cdot (2^4)^2 \\ &= 2^{12} \end{aligned}$$

であり、また  $a_1 = 1 > 0$ ,  $a_{n+1} = 2^4 (a_n)^2$  より数列  $\{a_n\}$  の項はすべて正であるから、

$$a_{n+1} = 2^4 (a_n)^2$$

の両辺に底を2とする対数をとることができて

$$\log_2 a_{n+1} = 4 + 2 \log_2 a_n$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+1} &= 4 + 2 \log_2 a_n \\ \Leftrightarrow \log_2 a_{n+1} + 4 &= 2(\log_2 a_n + 4) \end{aligned}$$

と変形することができるため、

$$b_n = \log_2 a_n + 4$$

とおくとすべての正の整数  $n$  に対して

$$b_{n+1} = 2b_n$$

が成り立つ。よって数列  $\{b_n\}$  は初項  $b_1 = \log_2 a_1 + 4 = 4$ 、公比 2 の等比数列であるから一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= 4 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \log_2 a_n + 4 &= 2^{n+1} \\ \Leftrightarrow \log_2 a_n &= 2^{n+1} - 4 \end{aligned}$$

であるから、

$$\log_2 a_8 = 2^9 - 4 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$2^9 = 1000000000_{(2)}, 4 = 100_{(2)}$$

であるから、

$$2^9 - 4 = 111111100_{(2)}$$

となるため、 $\log_2 a_8$  を 2 進法で表すと 1 が 7 個、2 が 2 個並ぶ。ここで①より

$$\begin{aligned} a_8 &= 2^{2^3-4} \\ &= 2^{508} \end{aligned}$$

であるから、 $a_n$  を 2 進法で表すと左端に 1 が 1 個あり、その後 0 が 508 個続いて並ぶ。すべての正の整数  $n$  に対して、

$$\frac{a_{n+2} \times (a_n)^2}{(a_{n+1})^2} > 0$$

であるから、底を2とする対数をとることができる。また、 $\log_2 a_n = 2^{n+1} - 4$ より

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{a_{n+2} \times (a_n)^2}{(a_{n+1})^2} &= \log_2 a_{n+2} + 2 \log_2 a_n - 2 \log_2 a_{n+1} \\ &= 2^{n+3} - 4 + 2 \cdot (2^{n+1} - 4) - 2 \cdot (2^{n+2} - 4) \\ &= 2^{n+2} - 4\end{aligned}$$

となる。したがって、すべての正の整数  $n$  に対して

$$\frac{a_{n+2} \times (a_n)^2}{(a_{n+1})^2} = 2^{2^{n+1}-4}$$

である。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ |
| 2 | 2 | 7 | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | ④ | 4 |
| サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | ⑧ | 1 | 9 | 8 |

〔解説〕

$$f(x)=2x+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \text{ とすると}$$

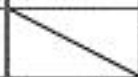
$$f'(x)=2-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

である。ここで、 $-\pi < x < \pi$  の範囲で  $f'(x)=0$  となる  $x$  の値を求める。

$$-\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{3}\pi < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \text{ であるから、この範囲で } f'(x)=0 \text{ となるような } x \text{ の値は、}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} &= -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} \left( \because -\frac{7}{3}\pi < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \right) \\ \therefore x &= -\frac{7}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |                                                                                     |                                                                                     |                                  |                                                                                     |                                 |                                                                                     |                                                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$     | $-\pi$                                                                              | ...                                                                                 | $-\frac{7}{12}\pi$               | ...                                                                                 | $\frac{5}{12}\pi$               | ...                                                                                 | $\pi$                                                                                 |
| $f'(x)$ |  | +                                                                                   | 0                                | +                                                                                   | 0                               | +                                                                                   |  |
| $f(x)$  |  |  | $f\left(-\frac{7}{12}\pi\right)$ |  | $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)$ |  |  |

増減表より、 $-\pi < x < \pi$  の範囲で、 $f(x)$  は極値をとらない。また  $f'(x)=2-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$  より

$$f''(x)=-4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

であり、 $-\pi < x < \pi$  の範囲で  $f''(x)=0$  となるような  $x$  の値を求める。先程と同様に

$$-\frac{7}{3}\pi < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \text{ であるから、この範囲で } f''(x)=0 \text{ となるような } x \text{ の値は}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} &= -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \left( \because -\frac{7}{3}\pi < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \right) \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{7}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \end{aligned}$$

である。これら全ての値の前後で  $f''(x)$  は符号変化するから、 $-\pi < x < \pi$  の範囲で  $C$  には変曲点がちょうど4個あり、 $x$  座標が最も大きいものは

$$a=\frac{11}{12}\pi$$

である。また、 $C$  の点  $Q\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$  における接線  $\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow y &= 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}+1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x+1 \end{aligned}$$

であり、 $t=2x-\frac{\pi}{3}$  とおくと  $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$  のとき  $t \rightarrow 0$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2x+1-f(x)}{\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)^2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \left( \because t=2x-\frac{\pi}{3} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1+\cos t)} \cdot \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{1+1} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また  $\frac{dt}{dx}=2 \Leftrightarrow dt=2dx$  であり、 $x$  と  $t$  の対応は以下のようになる。

|     |                 |               |                    |
|-----|-----------------|---------------|--------------------|
| $x$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\rightarrow$ | $\frac{11}{12}\pi$ |
| $t$ | 0               | $\rightarrow$ | $\frac{3}{2}\pi$   |

したがって、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^a \left\{ 2x+1-f(x) \right\}^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^a \left\{ 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (1-\cos t)^2 dt \left( \because 2x-\frac{\pi}{3}=t \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left( \frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= 1+\frac{9}{8}\pi \end{aligned}$$

である。