

〔I〕

(1)

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n + k \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

$$x_n + y_n = a_n + 2 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

$$x_n - y_n = b_n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

とする。①, ②, ③より,

$$x_{n+1} + y_{n+1} = (2x_n + y_n + k) + (x_n + 2y_n)$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} + y_{n+1} = 3(x_n + y_n) + k$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) + k$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n + 4 + k$$

であり, 数列 $\{a_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから,

$$4 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

である。また, ③より,

$$x_1 = a_1 - y_1 + 2$$

$$= 2 - 2 + 2$$

$$= 2$$

である。

(答) $k = -4, x_1 = 2$

(2)

①, ②より,

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (2x_n + y_n + k) - (x_n + 2y_n)$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n + k$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n - 4 \quad (\because k = -4)$$

となるから, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = x_1 - y_1 = 2 - 2 = 0$, 公差 -4 の等差数列であり,

$$b_n = -4(n-1)$$

となる。

(答) $b_n = -4(n-1)$

(3)

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$, 公比 3 の等比数列より

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

となるので, ③, ④より,

$$(x_n + y_n) - (x_n - y_n) = (a_n + 2) - b_n$$

$$\Leftrightarrow 2y_n = a_n - b_n + 2$$

$$\therefore y_n = \frac{(a_n + 2) - b_n}{2} = 3^{n-1} + 2n - 1 \quad (\because a_n = 2 \cdot 3^{n-1}, b_n = -4(n-1))$$

である。

(答) $y_n = 3^{n-1} + 2n - 1$

(4)

④より,

$$S - T = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n y_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n b_k$$

$$= -4 \sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$= -4 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= -4 \cdot \frac{n}{2} (n-1)$$

$$= -2n(n-1)$$

である。

(答) $S - T = -2n(n-1)$

〔Ⅱ〕

(1)

方程式の左辺を $f(x)$ とすると、 $f(b)=0$ より、 $f(x)$ は $x-b$ を因数にもつため、方程式の左辺を因数分解すると

$$(x-b)(x^2-2ax+2a^2+2ab+b^2)$$

となる。

$$(\text{答}) (x-b)(x^2-2ax+2a^2+2ab+b^2)$$

(2)

$(x-b)(x^2-2ax+2a^2+2ab+b^2)$ について、

$$x^2-2ax+2a^2+2ab+b^2=(x-a)^2+(a+b)^2$$

より、方程式の他の解は $x=a\pm(a+b)i$ である。

$$(\text{答}) x=a\pm(a+b)i$$

(3)

$a+b\neq 0$ より、方程式は常に虚数解 $a\pm(a+b)i$ を持つ。したがって、方程式のすべての解が実数解になることはない。

(証明終)

(4)

解と係数の関係より、方程式のすべての解の和は $2a+b$ であるから、

$$2a+b=1$$

$$\Leftrightarrow 2a=1-b \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、すべての解の積は $2a^2b+2ab^2+b^3$ であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$2a^2b+2ab^2+b^3=1$$

$$\Leftrightarrow (2a)^2b+2a\cdot 2b^2+2b^3=2$$

$$\Leftrightarrow (1-b)^2b+(1-b)\cdot 2b^2+2b^3=2$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b^2+b+2)=0$$

である。ここで、 $b^2+b+2=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ より、 b は実数であるから $b=1$ である。また $\textcircled{1}$

より $a=\frac{1-b}{2}=0$ である。

$$(\text{答}) a=0, b=1$$

〔Ⅲ〕

(1)

$f(-1)=0$ より,

$$f(-1)=-1-3a+b=0$$

$$\therefore b=3a+1$$

となる。

(答) $b=3a+1$

(2)

$f(x)$ を微分すると,

$$f'(x)=3x^2-6ax$$

$$=3x(x-2a)$$

となるから, $f'(x)=0$ となるのは $x=0, 2a$ のときである。よって, $a>0$ のとき増減表は下表となる。

x	...	0	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ の極小値は $f(2a)=-4a^3+3a+1$ であるから,

$$-4a^3+3a+1<0$$

$$\Leftrightarrow -(a-1)(2a+1)^2<0$$

$$\therefore a>1$$

となる。

(答) $a>1$

(3)

$a>1$ のとき, $2a>2$ より $-1\leq x\leq 2$ の範囲における増減表は下表となる。

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$

$f(0)=b=3a+1$, $f(2)=8-12a+b=9-9a$ であり, $a>1$ のとき $|3a+1|=3a+1$, $|9-9a|=9a-9$

となるから, $|f(x)|$ の最大値は $3a+1, 9a-9$ の大きい方である。

$$(9a-9)-(3a+1)=6a-10=6\left(a-\frac{5}{3}\right)$$

より, $a\geq\frac{5}{3}$ のとき最大値は $9a-9$ であり, $1<a<\frac{5}{3}$ のとき最大値は $3a+1$ である。

(答) $a\geq\frac{5}{3}$ のとき $9a-9$, $1<a<\frac{5}{3}$ のとき $3a+1$