

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	2	2	4	4	9	1	8	3	5
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
2	1	8	3	3	1	6			

〔解説〕

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ に $n=1$ を代入すると $S_1 = a_1$ であり,

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \cdot 3^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるので

$$a_1 = 3$$

である。また a_n は $n \geq 2$ のとき, S_n を用いて $a_n = S_n - S_{n-1}$ と表せるので, 一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n \cdot 3^n - (n-1) \cdot 3^{n-1} \\ &= (2n+1) \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のとき $a_1 = 3$ に一致する。〔イ〕の答えを用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k+1) &= 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

を得る。一般項 a_n の式に $n=2k$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (2 \cdot 2k+1) \cdot 3^{2k-1} \\ &= 3 \cdot (4k+1) \cdot 3^{2k-2} \\ &= 3 \cdot (4k+1) \cdot 9^{k-1} \end{aligned}$$

を得る。〔カ〕は9であるので等比数列の和 $T_m = \sum_{k=1}^m 9^{k-1}$ は

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{k=1}^m 9^{k-1} \\ &= \frac{1-9^m}{1-9} \\ &= \frac{1}{8}(9^m-1) \end{aligned}$$

である。また $U_m = \sum_{k=1}^m (k \cdot 9^{k-1})$ に対し, U_m から $9 \cdot U_m$ を引くと

$$\begin{aligned} U_m - 9 \cdot U_m &= \sum_{k=1}^m (k \cdot 9^{k-1}) - 9 \cdot \sum_{k=1}^m (k \cdot 9^{k-1}) \\ &= (1+2 \cdot 9+3 \cdot 9^2+\cdots+m \cdot 9^{m-1}) - \{1 \cdot 9+2 \cdot 9^2+\cdots+(m-1) \cdot 9^{m-1}+m \cdot 9^m\} \\ &= 1+(2-1) \cdot 9+(3-2) \cdot 9^2+\cdots+\{m-(m-1)\} \cdot 9^{m-1}-m \cdot 9^m \\ &= \sum_{k=1}^m 9^{k-1}-m \cdot 9^m \\ &= T_m-m \cdot 9^m \end{aligned}$$

である。また, これを U_m について解くと

$$\begin{aligned} U_m - 9 \cdot U_m &= T_m - m \cdot 9^m \\ \Leftrightarrow U_m &= \frac{1}{8}(m \cdot 9^m - T_m) \end{aligned}$$

と表すことができる。以上より, $\{a_n\}$ の第 $2m$ 項までの偶数番目の項の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{2k} &= \sum_{k=1}^m \{3 \cdot (4k+1) \cdot 9^{k-1}\} \\ &= \sum_{k=1}^m (12 \cdot k \cdot 9^{k-1} + 3 \cdot 9^{k-1}) \\ &= 12 \cdot U_m + 3 \cdot T_m \\ &= 12 \cdot \frac{1}{8}(m \cdot 9^m - T_m) + 3 \cdot T_m \left(\because U_m = \frac{1}{8}(m \cdot 9^m - T_m) \right) \\ &= \frac{3}{2}(m \cdot 9^m + T_m) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ m \cdot 9^m + \frac{1}{8}(9^m - 1) \right\} \left(\because T_m = \frac{1}{8}(9^m - 1) \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(m + \frac{1}{8} \right) \cdot 9^m - \frac{3}{16} \end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	0	3	6	2	1	0	2	5	3
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
4	1	1	7	0	9	0	3	0	

〔解説〕

(1)

同じ数字を2度使わないとき、まず十の位の数字を6つの数字から選び、一の位は十の位の数字と異なる数字を選ぶ必要があるので、作ることのできる整数の個数は

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ (個)}$$

である。同様に考えると同じ数字を2度使ってよいときは

$$6 \cdot 6 = 36 \text{ (個)}$$

である。

(2)

同じ数字を2度まで使ってよい場合は、余事象の考え方をを用いる。これは、同じ数字を何度使ってもよい場合から同じ数字を3度使う場合を引けばよいので、作ることのできる整数の個数は

$$6 \cdot 6 \cdot 6 - 6 \cdot 1 \cdot 1 = 210 \text{ (個)}$$

である。

(3)

同じ数字を2度まで使ってよいとき作ることのできる4桁の整数のうち千の位が1で、かつ百の位が1であるとき、十と一の位の数字は1以外の数字から自由に選ぶことができるので、作ることのできる整数の個数は

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ (個)}$$

である。千の位が1で、かつ百の位が2であるとき、十と一の位の数字は11, 22を除いたすべての数字の組み合わせを選ぶことができる。よって、作ることのできる整数の個数は2桁の数字の組み合わせ全体から11, 22を除いた

$$6 \cdot 6 - 2 = 34 \text{ (個)}$$

である。同じ数字を2度まで使ってよいとき作ることのできる4桁の整数を、千の位と百の位の数字が同じものとそうでないものに分ける。千の位と百の位の数字が同じとき、クケで千の位と百の位で1以外を選ぶ場合も考え

$$6 \cdot 25 = 150 \text{ (個)}$$

である。千の位と百の位の数字が異なるとき、千の位と百の位の数字の組み合わせは(1)より30個であり、それぞれに組み合わせることができる十と一の位の数字の組み合わせはコサから34個ずつであるので

$$30 \cdot 34 = 1020 \text{ (個)}$$

である。以上より、同じ数字を2度まで使ってよいとき、作ることのできる4桁の整数の個数は

$$150 + 1020 = 1170 \text{ (個)}$$

である。

(4)

3つの数字を2回ずつ使ってできる6桁の整数の個数は

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ (個)}$$

である。そのうちで1が隣り合う6桁の整数の個数は、2つの1を1つにまとめて考えて

$$\frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ (個)}$$

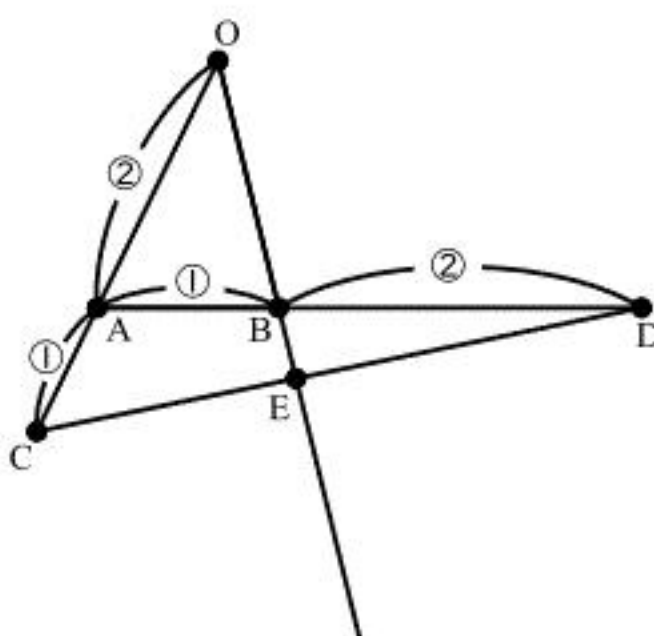
である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	2	－	2	3	3	7	9	7	4
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ			
7	1	6	1	2	1	9			

〔解説〕



点 C は辺 OA を 3:1 に外分するので

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OA}$$

であり, 点 D は辺 AB を 3:2 に外分するので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3-2} \\ &= -2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD}$ を変形すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + s\left(-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}s\right)\overrightarrow{OA} + 3s\overrightarrow{OB} \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また, $\overrightarrow{OE}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB}$ $\cdots \textcircled{2}$ と表すこともできる。ここで, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立なベクトルであるから, ①と②の係数を比較すると

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{7}{2}s = 0 \\ 3s = t \end{cases}$$

を得る。これを解いて

$$s = \frac{3}{7}, t = \frac{9}{7}$$

である。三角形 ABE の面積を S_1 とすると, 高さが同じ三角形の底辺の比を比較することで

$$\begin{aligned} S_1 : S_3 &= OB : BE = 7 : 2 \\ S_3 : S_2 &= AB : BD = 1 : 2 \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{S_2}{S_3} \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{1} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

である。 $OA = 2\sqrt{3}, OB = 7$ のときを考える。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 2\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \cos \theta \\ &= 14\sqrt{3} \cos \theta \end{aligned}$$

であり, $\overrightarrow{CE}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{7}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となるから, $|\overrightarrow{CE}|^2$ は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CE}|^2 &= \left| -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{7}\overrightarrow{OB} \right|^2 \\ &= \frac{9}{4} \cdot 12 - \frac{27}{7} \cdot 14\sqrt{3} \cos \theta + \frac{81}{49} \cdot 49 \\ &= 108 - 54\sqrt{3} \cos \theta \end{aligned}$$

となる。三角形 OCE の外接円の半径が $3\sqrt{3}$ であることから, 三角形 OCE に正弦定理を用いると

$$\frac{|\overrightarrow{CE}|}{\sin \theta} = 2 \cdot 3\sqrt{3}$$

を得る。両辺を 2 乗して変形すると

$$\begin{aligned} \frac{|\overrightarrow{CE}|^2}{\sin^2 \theta} &= (6\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow 108 - 54\sqrt{3} \cos \theta &= 108 \sin^2 \theta \quad (\because \sin \theta \neq 0) \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \quad (\because 0 < \theta < \pi) \end{aligned}$$

となる。 $\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき, $AB = x$ として三角形 OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} x^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \frac{\pi}{6} \\ &= (2\sqrt{3})^2 + 7^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore x &= \sqrt{19} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

を得る。

【Ⅳ】

【解答】

ア		イ		ウ		エ		オ		カ		キ		ク		ケ		コ	
－		3		8		4		2		3		2		4		－		4	
サ		シ		ス		セ		ソ		タ		チ		ツ		テ		ト	
8		3		9		1		3		1		1		3		5		7	
ナ		ニ		ヌ		ネ		ノ		ハ		ヒ							
0		2		－		1		3		4		3							

【解説】

(1)

$f'(x)$ は

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 4$$

である。 $f'(x) = 0$ となるのは

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x^2 + 8x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 2)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{2}{3}, 2 \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$		極小	↗	極大	↘

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

であり、増減表から、 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ は $f(x)$ の極小値であるが、最小値ではないといえる。

点Aにおける接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'(0) \cdot x + f(0) \\ &= -4x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。関数 $g(x)$ に関し、方程式 $g(x) = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right) - \left(-4x + \frac{8}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^3 + 4x^2 &= 0 \\ \therefore x &= 0(\text{重解}), 4 \end{aligned}$$

を得る。よって $\beta = 4$ である。また $g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2 + 8x \\ &= -3x\left(x - \frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

を得るので、 $0 < x < \beta$ において $g'(x) = 0$ となる x は $x = \frac{8}{3}$ である。よって $y = g(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{8}{3}$	...	4
$g'(x)$		＋	0	－	
$g(x)$	0	↗	最大	↘	0

増減表から、 $g(x)$ は $x = \frac{8}{3}$ で最大値をとる。

(2)

$h(x)$ において $x = t$ とすると

$$\begin{aligned} h(t) &= t|t - t| + (t - 2)t \\ &= t^2 - 2t \end{aligned}$$

となる。 $t < 0$ なので $t^2 > 0$ 、 $-2t > 0$ である。よって

$$h(t) = t^2 - 2t > 0$$

である。 $x \geq t$ のとき $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= x(x - t) + (t - 2)x \\ &= x^2 - 2x \\ &= (x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。これと $h(x) = (x - p)^2 - q$ を比較すると

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}$$

を得る。 $x < t$ のとき $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= x(-x + t) + (t - 2)x \\ &= -x^2 + 2(t - 1)x \\ &= -\{x - (t - 1)\}^2 + (t - 1)^2 \end{aligned}$$

となる。これと $h(x) = -(x - r)^2 + r$ を比較すると

$$\begin{cases} r = t - 1 \\ s = (t - 1)^2 \end{cases}$$

を得る。以上より $h(x) = 0$ となるのは

$$x = 0, 2, 2(t - 1)$$

のときであり、このとき $x = 2(t - 1)$ は $x < t$ を満たす。 $t < 0$ よりその大小関係は

$$2(t - 1) < 0 < 2$$

である。定積分 $\int_t^2 |h(x)| dx$ は積分範囲が $x \geq t$ となるので

$$\int_t^2 |h(x)| dx = \int_t^2 |x^2 - 2x| dx$$

である。 $x \leq 0$ のとき、 $x^2 - 2x \geq 0$ となるので

$$\begin{aligned} \int_t^0 |x^2 - 2x| dx &= \int_t^0 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_t^0 \\ &= \frac{-1}{3}t^3 + t^2 \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 2$ のとき、 $x^2 - 2x \leq 0$ となるので

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - 2x| dx &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} \int_t^2 |h(x)| dx &= \int_t^2 |x^2 - 2x| dx \\ &= \int_t^0 |x^2 - 2x| dx + \int_0^2 |x^2 - 2x| dx \\ &= \frac{-1}{3}t^3 + t^2 + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

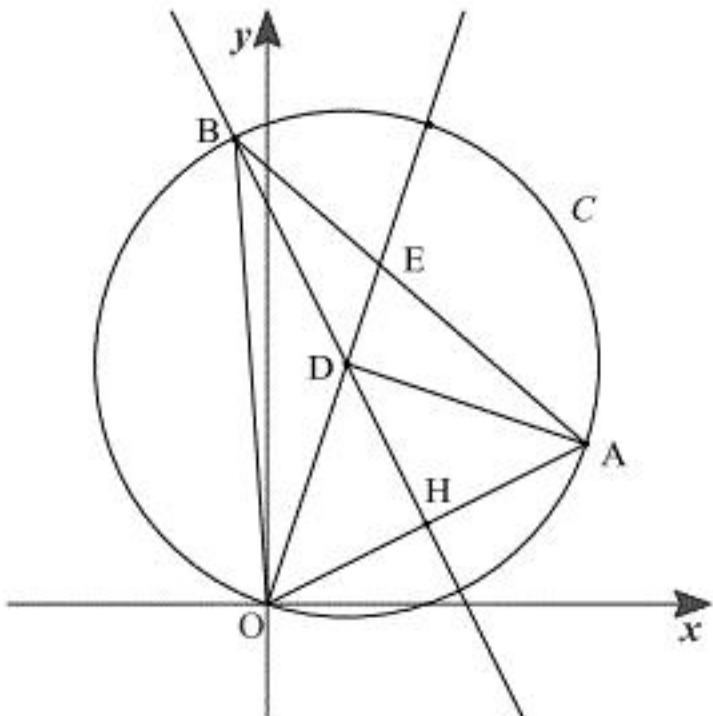
である。

〔V〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
	2	5	－	2	5	1	0	1	3	1	
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ		
	2	4	8	2	2	4	2	0	2		

〔解説〕



線分 OA の長さは

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。線分 OA の中点を H とすると、座標は $H(2, 1)$ である。また、線分 OA の傾きは $\frac{1}{2}$ であるから線分 OA に垂直に交わる直線の傾きは -2 である。以上より、線分 OA の垂直二等分線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2(x - 2) + 1 \\ &= -2x + 5 \end{aligned}$$

である。D は C の中心であるから OD は C の半径と等しい。よって

$$OD = \sqrt{10}$$

である。D は ℓ 上に存在するのでその座標は実数 a を用いて $(a, -2a + 5)$ と表すことができる。これを用いると OD は

$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{a^2 + (-2a + 5)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 - 20a + 25} \end{aligned}$$

となる。OD = $\sqrt{10}$ となるとき a は

$$\sqrt{5a^2 - 20a + 25} = \sqrt{10}$$

両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} 5a^2 - 20a + 25 &= 10 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a - 3) &= 0 \\ \therefore a &= 1, 3 \end{aligned}$$

であるので、それぞれの a について D の座標を求めると

$$(1, 3), (3, -1)$$

を得る。D は第 1 象限に存在するので

$$D(1, 3)$$

である。三角形 OAD と三角形 OAB は線分 OA を共有しているので OA と D、OA と B との距離の比が面積の比になる。三角形 OAB は二等辺三角形であるので頂点 B も D と同じ底辺 OA の垂直二等分線上に存在する。OA と D との距離は線分 HD の長さであり

$$\begin{aligned} HD &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。OA と B の距離は線分 HD と線分 DB の長さの和である。線分 DB は C の半径と等しいので

$$HB = \sqrt{5} + \sqrt{10}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{HB}{HD} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{10}}{\sqrt{5}} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

を得る。ここで、三角形 OAD の 3 辺の長さの比は

$$\begin{aligned} OD : DA : OA &= \sqrt{10} : \sqrt{10} : 2\sqrt{5} \\ &= 1 : 1 : \sqrt{2} \end{aligned}$$

であることから、三角形 OAD は $\angle ODA = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形であることがわかる。こ

で $\angle EAD = \angle EAO - \angle DAO$ であり、 $\angle ODB$ は $\angle ODH$ の外角なので $\angle ODB = \frac{3}{4}\pi$ である。よ

つて $\angle EAO = \angle BAO$ は円周角の定理より

$$\begin{aligned} \angle EAO &= \frac{1}{2} \angle BDO \\ &= \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

である。 $\angle DAO = \frac{\pi}{4}$ であるので

$$\begin{aligned} \angle EAD &= \angle EAO - \angle DAO \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

を得る。半角の公式を用いると

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\angle ODA = \frac{\pi}{2}$ であるので $\angle EDA = \frac{\pi}{2}$ である。よって AE^2 は

$$\begin{aligned} AE^2 &= \left(AD \cdot \frac{1}{\cos \angle EAD} \right)^2 \\ &= 10 \cdot \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \\ &= 20(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

である。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	1	6	1	2	1	－	2	7	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
1	3	4	3	3	8	－	1	4	2
ナ	ニ	ヌ	ネ						
2	7	6	4						

〔解説〕

点 Q の座標は $Q(\cos \theta, 0)$ であるから三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} \{ \cos \theta - (-1) \} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

である。また、関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2} (1 + \cos x) \sin x \cdot \frac{1}{\sin(5x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2} (1 + \cos x) \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{5x}{\sin(5x)} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ の導関数、第 2 次導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \{ -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cdot \cos x \} \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (\cos x + 1) \\ f''(x) &= -\sin x (\cos x + 1) + \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) (-\sin x) \\ &= -2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x \\ &= -2 \left(\cos x + \frac{1}{4} \right) \sin x \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \pi$ を考慮すると、 $f'(x) = 0$ 、 $f''(x) = 0$ の解 a, b はそれぞれ

$$\cos a = \frac{1}{2}, \cos b = -\frac{1}{4}$$

を満たしているので、 $0 < x < \pi$ で $\cos x$ が単調減少することより

$$a < b$$

である。よって $\alpha = a$ 、 $\beta = b$ となり、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	α	...	β	...	π
$f'(x)$		+	0	－	－	－	
$f''(x)$		－	－	－	0	+	
$f(x)$	0		極大		変曲点		0

よって増減表より、

- (i) $0 < x < \alpha$ において、 $f(x)$ はつねに増加し、 C は上に凸である。
- (ii) $\alpha < x < \beta$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は上に凸である。
- (iii) $\beta < x < \pi$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は下に凸である。

三角形 PQR の面積の最大値は $f(\alpha)$ であり、 $\cos a = \frac{1}{2}$ より $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であるので

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ の不定積分は

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos x) \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \sin x - \cos x (\cos x)' \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) + K \\ &= \frac{-1}{4} (\cos^2 x + 2 \cos x) + K \end{aligned}$$

と表されるので、定積分 $\int_a^\beta f(x) dx$ の値は

$$\begin{aligned} \int_a^\beta f(x) dx &= -\frac{1}{4} \left[\cos^2 x + 2 \cos x \right]_a^\beta \\ &= -\frac{1}{4} (\cos^2 \beta + 2 \cos \beta - \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha) \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

である。