

[1]

[解答]

|   |   |    |    |   |
|---|---|----|----|---|
| ア | イ | ウエ | オカ | キ |
| 5 | 2 | 72 | 32 | 5 |

[解説]

2次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \quad (\because \alpha < \beta) \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} &= \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

と求められる。また、

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ \therefore x &= 3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

であり、 $\alpha < \beta$  より  $\alpha = 3 - \sqrt{5}$  となる。したがって、

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= (3 - \sqrt{5})^3 \\ &= (14 - 6\sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) \\ &= 72 - 32\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

## [2]

### [解答]

|     |      |
|-----|------|
| アイウ | エオカキ |
| 840 | 1200 |

### [解説]

隣り合う A と B を 1 つの文字として、7 文字の順列を考えればよい。D を 2 個、E を 3 個含むことと、A と B の並び方が AB, BA の 2 通りあることに注意すると、並べ方は全部で

$$\frac{7!}{2!3!} \cdot 2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \text{ (通り)}$$

ある。また、E と E が 1 組も隣り合わないとき、下の図における 5 つの  $\Delta$  に E 以外の 5 文字 (2 個の D を含む) を 1 文字ずつ入れ、 $\Delta$  の間と両端にある 6 つの  $\bigcirc$  のうち 3 箇所にも E を 1 文字ずつ入れることを考えればよい。

$\bigcirc \quad \Delta \quad \bigcirc \quad \Delta \quad \bigcirc \quad \Delta \quad \bigcirc \quad \Delta \quad \bigcirc \quad \Delta \quad \bigcirc$

したがって、並べ方は全部で

$$\frac{5!}{2!} \cdot {}_6C_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1200 \text{ (通り)}$$

ある。

### [3]

〔解答〕

|     |    |    |
|-----|----|----|
| (1) | アイ |    |
|     | 13 |    |
| (2) | ウエ | オカ |
|     | 11 | 15 |

〔解説〕

(1)

$P(x, y)$  とおくと、 $D$  を表す不等式は、

$$\begin{aligned}
 & A_1 P^2 + B_1 P^2 \leq 36 \\
 & \Leftrightarrow \{(x-3)^2 + (y-4)^2\} + \{(x+1)^2 + (y-2)^2\} \leq 36 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \leq 36 \\
 & \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2y^2 - 12y \leq 6 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y \leq 3 \\
 & \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 13
 \end{aligned}$$

となるから、 $D$  は中心が点  $(1, 3)$ 、半径が  $\sqrt{13}$  の円の周および内部である。よって、 $D$  の面

積は

$$(\sqrt{13})^2 \pi = 13\pi$$

となる。

(2)

$C$  の方程式は

$$\begin{aligned}
 & A_2 P^2 - B_2 P^2 = 4k \\
 & \Leftrightarrow \{(x-2)^2 + (y+3)^2\} - \{(x+4)^2 + (y-1)^2\} = 4k \\
 & \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9) - (x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1) = 4k \\
 & \Leftrightarrow -12x + 8y - 4 = 4k \\
 & \Leftrightarrow 3x - 2y + k + 1 = 0
 \end{aligned}$$

であるから、円  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$  の中心  $(1, 3)$  と直線  $3x - 2y + k + 1 = 0$  の距離を  $d$  とする

と、 $D$  と  $C$  の共有点が存在する条件は  $d \leq \sqrt{13}$  となる。したがって、求める  $k$  の値の範囲は

$$\begin{aligned}
 & d \leq \sqrt{13} \\
 & \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + k + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \leq \sqrt{13} \\
 & \Leftrightarrow |k - 2| \leq 13 \\
 & \therefore -11 \leq k \leq 15
 \end{aligned}$$

である。

〔4〕

〔解答〕

|     |                                                                |                                                               |                                                               |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">ア</span>  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">イ</span> |                                                               |                                                                |
|     | 2                                                              | 2                                                             |                                                               |                                                                |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">ウエ</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">オ</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">カ</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">キク</span> |
|     | 11                                                             | 6                                                             | 2                                                             | 14                                                             |

〔解説〕

(1)

三角形 ABC において、余弦定理より

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = BC^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot \frac{5\sqrt{2}}{8} = 2$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} AC + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (AC - 2\sqrt{2}) \left( AC - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{2} \quad (\because AB < AC)$$

である。

(2)

$\sin A > 0$  であるから、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{50}{8^2}} \\ &= \sqrt{\frac{64 - 50}{8^2}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{8} \end{aligned}$$

となり、三角形 ABC の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と求められる。また、三角形 ABC の内接円の半径を  $r$  とおくと、 $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r (AB + AC + BC) \\ &= \frac{1}{2} r (2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2} r \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。よって、①、②より

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7}}{2} &= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2} r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{7}}{2 + 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2} - 2)}{(3\sqrt{2})^2 - 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2} - 2)}{14} \end{aligned}$$

となる。したがって、三角形 ABC の内接円の面積は

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2} - 2)}{14} \right\}^2 \pi &= \frac{7(22 - 12\sqrt{2})}{14^2} \pi \\ &= \frac{11 - 6\sqrt{2}}{14} \pi \end{aligned}$$

と求められる。

〔5〕

〔解答〕

|     |    |    |   |
|-----|----|----|---|
| (1) | ア  | イ  | ウ |
|     | 1  | 2  | 2 |
| (2) | エオ | カキ | ク |
|     | 41 | 31 | 2 |
| (3) | ケコ |    |   |
|     | 14 |    |   |

〔解説〕

(1)

$$a_{n+1} = \sqrt{2}a_n + 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = \sqrt{2}(a_n - 1)$$

より、数列  $\{a_n - 1\}$  は初項  $a_1 - 1 = 1$ 、公比  $\sqrt{2}$  の等比数列であるから、

$$a_n - 1 = (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 1 + (\sqrt{2})^{n-1}$$

と表せる。よって、

$$a_4 = 1 + (\sqrt{2})^3$$

$$= 1 + 2\sqrt{2}$$

である。

(2)

(1)で求めた数列  $\{a_n\}$  の一般項を利用すると、求める和は、

$$\sum_{k=1}^{10} \{1 + (\sqrt{2})^{k-1}\} = 10 + \frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= 10 + \frac{(2^5 - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= 41 + 31\sqrt{2}$$

となる。

(3)

$a_n > 80$  より、

$$a_n > 80$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\sqrt{2})^{n-1} > 80$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^{n-1} > 79$$

となる。両辺が正より、両辺を 2 乗すると

$$2^{n-1} > 6241$$

である。 $2^{12} = 4096$ 、 $2^{13} = 8192$  であるから、求める最小の自然数  $n$  は

$$n - 1 = 13$$

$$\therefore n = 14$$

となる。

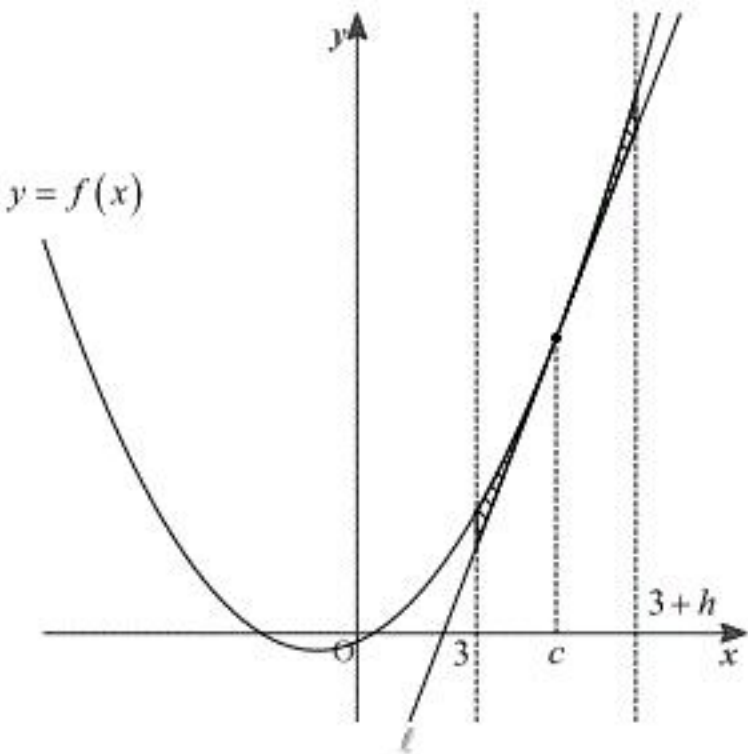
〔6〕

〔解答〕

|     |    |    |    |   |
|-----|----|----|----|---|
| (1) | アイ | ウエ | オカ | キ |
|     | 12 | 26 | 16 | 3 |
| (2) | ク  | ケ  |    |   |
|     | 2  | 3  |    |   |

〔解説〕

(1)  $h > 0$  に注意して問題文の状況を図示すると次のようになる。



問題文の定義より、

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} \\ &= \frac{\{(3+h)^2 + 2(3+h) - 1\} - (3^2 + 2 \cdot 3 - 1)}{h} \\ &= \frac{6h + h^2 + 2h}{h} \\ &= h + 8 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $f'(x) = 2x + 2$  であるから、

$$\begin{aligned} f'(c) &= m \\ \Leftrightarrow 2c + 2 &= h + 8 \\ \Leftrightarrow c &= 3 + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ち、 $x = c$  における  $y = f(x)$  の接線  $\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(c)(x - c) + f(c) \\ \Leftrightarrow y &= (2c + 2)(x - c) + c^2 + 2c - 1 \\ \Leftrightarrow y &= (2c + 2)x - c^2 - 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。さらに、 $S$  は前図の斜線部分であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_3^{3+h} \left[ (x^2 + 2x - 1) - \{(2c + 2)x - c^2 - 1\} \right] dx \\ &= \int_3^{3+h} (x^2 - 2cx + c^2) dx \\ &= \int_3^{3+h} (x - c)^2 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \left( x - 3 - \frac{h}{2} \right)^3 \right]_3^{3+h} \left( \because c = 3 + \frac{h}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \\ &= \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。したがって、 $h = 4$  のとき、①、②より

$$m = 12, c = 5$$

となり、 $\ell$  の  $y$  切片は③より

$$\begin{aligned} -c^2 - 1 &= -5^2 - 1 \\ &= -26 \end{aligned}$$

と求められる。また、 $S$  は④より

$$S = \frac{h^3}{12} = \frac{4^3}{12} = \frac{16}{3}$$

となる。

(2)

④より、

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{2}{81} \\ \Leftrightarrow \frac{h^3}{12} &\leq \frac{2}{81} \\ \Leftrightarrow h^3 &\leq \frac{8}{27} \end{aligned}$$

となる。よって、求める  $h$  の最大値は  $h = \frac{2}{3}$  である。