

【1】

〔解答〕

(1)	ア	イ					
	0	2					
(2)	ウ	エ	オ				
	1	6	4				
(3)	カ	キ					
	5	7					
(4)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	1	3	2	2	1	3	1

〔解説〕

(1)

x を実数とする。方程式

$$4^x = \frac{5}{4} \cdot 2^{x+2} - 4$$

について、 $t = 2^x (> 0)$ と置いて変形すると、

$$\begin{aligned} 4^x &= 5 \cdot 2^x - 4 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 5t - 4 \\ \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, 4 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2 \end{aligned}$$

より、この方程式の解は $x = 0, 2$ である。

(2)

底の変換を行うと

$$\begin{aligned} -\log_3 8 &= \frac{-\log_9 8}{\log_9 3} \\ &= -2 \log_9 8 \\ &= \log_9 \frac{1}{64} \end{aligned}$$

となるので

$$9^{-\log_3 8} = 9^{\log_9 \frac{1}{64}} = \frac{1}{64}$$

である。

(3)

$1 < x < 9$ のとき、真数 $9-x, x-1$ はどちらも常に正である。ここで、 $f(x)$ の各項を底が 2 の対数でそろえると、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log_2 (9-x)^2}{\log_2 4} + \log_2 (x-1) + \log_2 2^3 \\ &= \log_2 (9-x) + \log_2 (x-1) + \log_2 8 \\ &= \log_2 8(9-x)(x-1) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $h(x) = 8(9-x)(x-1) (1 < x < 9)$ とおくと $f(x) = \log_2 h(x)$ であり、 $\log_2 x$ は単調増加であるので $h(x)$ が最大になるとき、 $f(x)$ は最大値をとる。 $h(x)$ を平方完成して

$$\begin{aligned} h(x) &= 8(9-x)(x-1) \\ &= -8x^2 + 80x - 72 \\ &= -8(x-5)^2 + 128 \end{aligned}$$

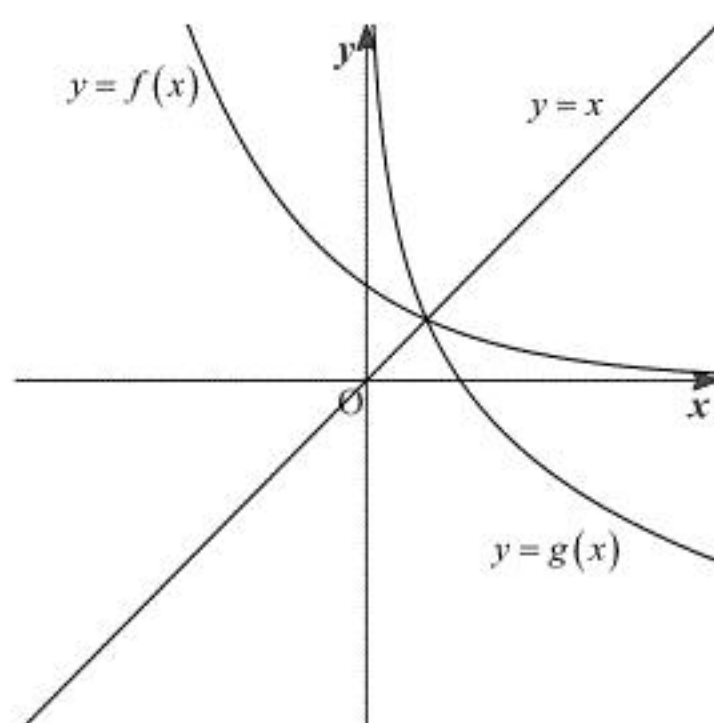
より、 $h(x)$ は $x = 5$ で最大値をとるから、 $f(x)$ は $x = 5$ のとき最大値

$$\begin{aligned} f(5) &= \log_2 128 \\ &= \log_2 2^7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

をとる。

(4)

$0 < a < 1$ であるから、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは下図となる。



上図より、 $f(x)$ は常に正の値をとり、 $x > 0$ において、 $g(x)$ は正の値も負の値もとる。また、 $y = f(x)$ のグラフは右下がりの曲線であり、 $x > 0$ における $y = g(x)$ のグラフも右下がりの

曲線である。さらに、 $y = \log_a \frac{1}{x} (x > 0)$ は

$$\begin{aligned} y &= \log_a \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow y &= -\log_a x \\ \Leftrightarrow -y &= \log_a x \end{aligned}$$

と変形できるから、 $y = g(x)$ のグラフは $y = \log_a \frac{1}{x} (x > 0)$ のグラフと x 軸に関して対称である。また、 $y = f(x)$ において x と y を入れ替えると

$$\begin{aligned} x &= a^y \\ \Leftrightarrow y &= \log_a x \\ \therefore y &= g(x) \end{aligned}$$

となることから、 $y = g(x)$ は $y = f(x)$ の逆関数である。したがって、 $y = f(x)$ のグラフは $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である。ここで、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの交点について考える。

$$\begin{aligned} f(a) &= a^a (< 1) \\ g(a) &= 1 \end{aligned}$$

より、 $f(a) < g(a)$ であり、

$$\begin{aligned} f(1) &= a (> 0) \\ g(1) &= 0 \end{aligned}$$

より、 $f(1) > g(1)$ であるから、中間値の定理より、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは $a < x < 1$ の範囲で交点を持つ。 $y = f(x)$ は単調減少、 $y = g(x)$ は単調増加であるから、交点はこの他に存在せず、求める個数は 1 個であるとわかる。

【Ⅱ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
8	2	2	0	4	4
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	6	5	6	2	2
ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
1	3	8	3	6	2
テ	ト				
5	8				

【解説】

yz 平面の方程式は $x=0$ より、この平面に関して A と対称な点は $(-4, 2, 2)$ である。また、

$$A(4, 2, 2), B(1, 4, 6), C(5, 1, 1)$$

より、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 2, 4)$$

であるから、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= (4, 2, 2) \cdot (-3, 2, 4) \\ &= -12 + 4 + 8 \\ &= 0\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ より $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ である。同様に、内積 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ を計算する

と

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-4, -2, -2) \cdot (5-4, 1-2, 1-2) \\ &= -4 + 2 + 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ より $\angle OAC = \frac{\pi}{2}$ である。さらに、 $\triangle ACB$ に対しても同様の議論を適

応すると、内積 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-1, 1, 1) \cdot (1-5, 4-1, 6-1) \\ &= 4 + 3 + 5 \\ &= 12\end{aligned}$$

となるので、内積の定義より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \\ &= \frac{12}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 5^2}} \\ &= \frac{12}{5\sqrt{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

である。よって、三角形 ABC の面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。ここで $\angle OAB = \angle OAC = \frac{\pi}{2}$ であるから、線分 OA と三角形 ABC を含む平面は垂直で

あり、四面体 $OABC$ の底面積、高さはそれぞれ S_1 , $|\overrightarrow{OA}|$ とわかる。したがって、この体積 V_1

は

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{3} |\overrightarrow{OA}| \cdot S_1 \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

である。次に、 k を実数として $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} &= k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

と表せる。また、実数 s ($0 < s < 1$) について、

$$\overrightarrow{OE} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$$

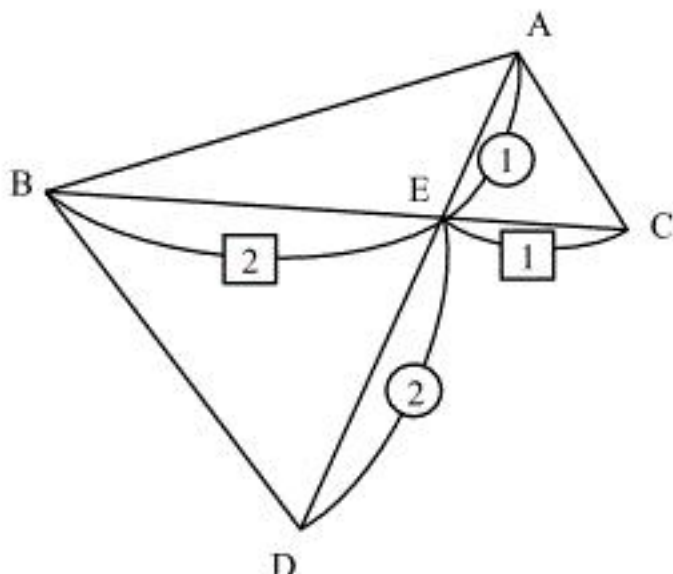
とも表せるため、

$$\begin{aligned}(1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC} &= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+4s \\ 4-3s \\ 6-5s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4-k \\ 2 \\ 2+2k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (s, k) &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

と求まる。三角形 BDE は三角形 ABC と同一平面上に存在するから、四面体 $OBDE$ は底面が

三角形 BDE 、高さ $|\overrightarrow{OA}|$ の四面体である。 $k = \frac{1}{3}$ より $AE:ED = 1:2$, $s = \frac{2}{3}$ より $BE:EC = 2:1$ で

あるから、三角形 ABC と点 D, E の位置関係を図に示すと下図のようになる。



$AE:ED = 1:2$, $BE:EC = 2:1$ より三角形 BDE の面積 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2 &= 2 \cdot (\text{三角形 } ABE \text{ の面積}) \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot S_1 \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

となるから、四面体 $OBDE$ の体積 V_2 は

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot S_2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

である。また、 $k = \frac{1}{3}$ を代入すると点 E の座標は $\left(\frac{11}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$ とわかる。 $|\overrightarrow{AE}|$ は

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AE}| &= \sqrt{\left(4 - \frac{11}{3}\right)^2 + (2-2)^2 + \left(2 - \frac{8}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

であるので、 E を中心とし、 A を通る球の方程式は

$$\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

である。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ				
	2	8	1	2	1	2				
(2)	キ	ク	ケ							
	2	4	8							
(3)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	5	6	0	2	0	0	8	3	2	

〔解説〕

(1)

8個の頂点のうち相違なる2個を選び出すと自然に1つの辺が定まることから、線分の総数は

$$\begin{aligned}{}_8C_2 &= \frac{8 \cdot 7}{2} \\ &= 28\end{aligned}$$

より28本である。このうち、長さが1である線分は立方体の各辺のみであるから、このような線分の総数は図1より12本である。また、長さが $\sqrt{2}$ の線分は立方体の面上にのみ存在し、各面にそれぞれ2本ずつ存在することから、総数は $2 \cdot 6 = 12$ (本)である。

(2)

T について

3辺の長さが $1, 1, \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形：三角形①

3辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ の三角形：三角形②

3辺の長さが $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の直角三角形：三角形③

と名付ける。 T が三角形①となるのは頂点の3点が K の1つの面上にすべて存在する場合であり、1つ面を固定すると3点の選び方は ${}_4C_3 = 4$ 通り存在するから、 T が三角形①となる3点の選び方は $4 \cdot 6 = 24$ (通り)である。続いて T が三角形②となる場合を考える。 K の頂点1つに対し、その点からの距離が $\sqrt{2}$ となる頂点は3個存在する。これらのうち2個を選ぶと T は必ず正三角形となるが、これを各頂点で考えると K の対称性より各頂点を2回ずつ余分に数えてしまう。従って、この場合の3点の選び方は

$$3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = 8$$

より8通りである。

(3)

T_1 と T_2 が互いの頂点を共有しないようにするには、 T_1 は K の8個の頂点のうち3個を選んで作り、 T_2 は1回目の操作で選ばなかった5点の内3個を選んで作ればよい。このような頂点の選び方は

$$\begin{aligned}{}_8C_3 \cdot {}_5C_3 &= 56 \cdot 10 \\ &= 560\end{aligned}$$

より560通りである。

また、 T_1 と T_2 が同一平面上にあるとき、三角形①、三角形②、三角形③はそれぞれ異なる平面上に存在することから、 T_1 と T_2 の三角形の種類は等しい。それぞれの種類の三角形について場合分けして考える。

[1] T_1 と T_2 がともに三角形①の場合

T_1 の選び方は(2)より24通りある。また T_1 は K の面に含まれており、 K の各面に三角形①は4つずつ存在するから、それぞれの T_1 に対して T_2 の選び方は4通り存在する。したがって、この場合の選び方は

$$24 \cdot 4 = 96$$

より96通りある。

[2] T_1 と T_2 がともに三角形②の場合

T_1 の選び方は(2)より8通りある。また T_1 が含まれている平面に含まれる三角形②は T_1 のみであるから、 T_2 の選び方は1通りしか存在しない。したがって、この場合の選び方は

$$8 \cdot 1 = 8$$

より8通りある。

[3] T_1 と T_2 がともに三角形③の場合

(2)より K 上の頂点からなる三角形は三角形①、②、③のいずれかであり、三角形③の個数は

$$\begin{aligned}{}_8C_3 - 24 - 8 &= 56 - 32 \\ &= 24\end{aligned}$$

より24通りあるから、 T_1 の選び方は24通りある。また T_1 が含まれている平面に含まれる三角形③は4つあるから、 T_2 の選び方は4通り存在する。したがって、この場合の選び方は

$$24 \cdot 4 = 96$$

より96通りある。

以上[1], [2], [3]より、求める選び方は

$$96 + 8 + 96 = 200$$

より200通りである。

次に、「 T_1 と T_2 のうち、少なくとも一方が正三角形になる」の余事象は「 T_1 と T_2 がいずれも三角形①または三角形③となる」である。このような T_1, T_2 の選び方は

$$(24 + 24)^2 = 2304$$

より2304通りである。全事象は $({}_8C_3)^2 = 3136$ 通りなので、求める頂点の選び方は

$$3136 - 2304 = 832$$

より832通りである。

〔V〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ			
	4	1	4			
(1)	エ	オ	カ	キ	ク	
	5	1	7	2	1	
(2)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	－	4	1	－	2	1
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	4	5	6	5	1	

〔解説〕

F を因数分解すると

$$\begin{aligned} F &= x^2 + 3xy - 4y^2 + 3x + 17y - 4 \\ &= x^2 + 3(y+1)x - (4y^2 - 17y + 4) \\ &= x^2 + 3(y+1)x - (4y-1)(y-4) \\ &= (x+4y-1)(x-y+4) \end{aligned}$$

となり、 $G = x+4y-1$ 、 $H = x-y+4$ がわかる。

(1)

x, y を $-10 \leq x \leq 10$ 、 $-10 \leq y \leq 10$ を満たす整数とする。 (x, y) が $G=0$ を満たすとき、

$$x+4y-1=0 \Leftrightarrow x=1-4y$$

が成り立つから、 y は $-10 \leq 1-4y \leq 10$ かつ $-10 \leq y \leq 10$ を満たす整数であり、これらを満たすのは y が $-2 \leq y \leq 2$ のときである。よって、 $G=0$ となる y は 5 個あり、1 つの y の値に対して 1 つの x の値が対応するから、 $G=0$ を満たす (x, y) の組は 5 個である。同様に、 (x, y) が $H=0$ を満たすとき

$$x-y+4=0 \Leftrightarrow x=y-4$$

が成り立つから、 y は $-10 \leq y-4 \leq 10$ かつ $-10 \leq y \leq 10$ を満たす整数であり、これらを満たすのは y が $-6 \leq y \leq 10$ のときである。よって、 $H=0$ となる y は 17 個あり、1 つの y の値に対して 1 つの x の値が対応するから、 $H=0$ を満たす (x, y) の組は 17 個である。さらに、 $G=0$ かつ $H=0$ を満たす (x, y) の組は

$$\begin{cases} x+4y-1=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

の 1 組だけであり、この (x, y) は $-10 \leq x \leq 10$ 、 $-10 \leq y \leq 10$ を満たしている。よって、 $F=0$ を満たす整数の組 (x, y) の個数は

$$5+17-1=21$$

より 21 個である。

(2)

x, y は整数より G, H も整数であるから

$$F=1 \Leftrightarrow (G, H)=(1, 1), (-1, -1)$$

が成り立つ。

[1] $(G, H)=(1, 1)$ の場合

$$\begin{cases} x+4y-1=1 \\ x-y+4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

より、 $(x, y)=(-2, 1)$ である。

[2] $(G, H)=(-1, -1)$ の場合

$$\begin{cases} x+4y-1=-1 \\ x-y+4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

より、 $(x, y)=(-4, 1)$ である。

以上 [1], [2] より、 $F=1$ を満たす整数の組 (x, y) は

$$(x, y)=(-4, 1), (-2, 1)$$

である。

(3)

$F=p$ で、 G, H の値は整数であり、 p は素数であることから (G, H) の組は

$$(G, H)=(p, 1), (1, p), (-p, -1), (-1, -p)$$

のいずれかである。ここで、有理数の組 (x, y) を G, H を用いて表すと

$$\begin{cases} x+4y-1=G \\ x-y+4=H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{G+4H-15}{5} \\ y=\frac{G-H+5}{5} \end{cases}$$

であり、また、 (G, H) の組み合わせがどの場合であっても $G-H$ の値は $p-1$ または $1-p$ である。したがって、 y の値は

$$y=\frac{p+4}{5} \text{ または } \frac{6-p}{5}$$

である。 p を 5 で割った余りを r とおくと、 p はある整数 k を用いて

$p=5k+r$ ($r=0, 1, 2, 3, 4$) と表せるから、 y は

$$y=k+\frac{r+4}{5} \text{ または } 1-k+\frac{1-r}{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 y が整数であるとき、 G, H が整数であることと

$$\begin{cases} x+4y-1=G \\ x-y+4=H \end{cases}$$

より x も整数である。よって、 $\textcircled{ii}$ を満たす有理数の組 (x, y) で x と y がすべて整数となる r

を求めるためには、 y が整数である条件を考えればよい。 $\textcircled{1}$ より $\frac{r+4}{5}, \frac{1-r}{5}$ がともに整数で

あれば y も整数であり、そのような r は $r=1$ のみである。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ			
	0	2	4	2	2	2			
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ				
	1	6	4	6	9				
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	1	7	4	0	－	1	3	3	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-\sin x(1-\cos x)-\cos x\cdot \sin x}{(1-\cos x)^2} \\&= \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}\end{aligned}$$

である。上の式より、 $0<x<\pi$ で $f'(x)<0$ 、 $\pi<x<2\pi$ で $f'(x)>0$ なので、 $0<x<\pi$ で $f(x)$ は減少し、 $\pi<x<2\pi$ で $f(x)$ は増加する。よって $0<x<2\pi$ において、 $f(x)$ は減少したのち増加する。また、 $f(x)$ の第2次導関数は

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{-\cos x(1-\cos x)^2-(-\sin x)\{2\sin x(1-\cos x)\}}{(1-\cos x)^4} \\&= \frac{-\cos x+\cos^2 x+2\sin^2 x}{(1-\cos x)^3} \\&= \frac{-\cos^2 x-\cos x+2}{(1-\cos x)^3} \\&= \frac{(1-\cos x)(\cos x+2)}{(1-\cos x)^3} \\&= \frac{\cos x+2}{(1-\cos x)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $\cos x=u$ とおくと $f''(x)=\frac{u+2}{(1-u)^2}$ となる。 $0<x<2\pi$ より $-1\leq u<1$ である。よ

って、 $(1-u)^2>0$ かつ $u+2\geq 1$ であるから $f''(x)$ はつねに正の値をとり、 C は下に凸である。

(2)

$$t=\tan\frac{x}{2}\text{とおく。}\quad 1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\text{より}$$

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{x}{2} &= \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\&= \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

であり、 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$ より、

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1 \\&= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

である。また、 $t=\tan\frac{x}{2}$ の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \\&= \frac{1+t^2}{2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

定積分 $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\tan\frac{x}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$ の値を求める。 $t=\tan\frac{x}{2}$ によって置換すると

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\cos x}{1-\cos x} \\&= \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\&= \frac{1-t^2}{2t^2}\end{aligned}$$

である。また

x	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\rightarrow$	1

より

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\tan\frac{x}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \\&= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{1-t^2}{2t^2}\cdot t(1+t^2)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\&= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{1-t^2}{t}dt\end{aligned}$$

となる。これを計算すると、

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{1-t^2}{t}dt \\&= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\left(\frac{1}{t}-t\right)dt \\&= \left[\log|t|-\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \\&= \left(\log 1-\frac{1}{2}\right)-\left\{\log\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\} \\&= \frac{-1}{3}+\log\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。