

【I】

(1)

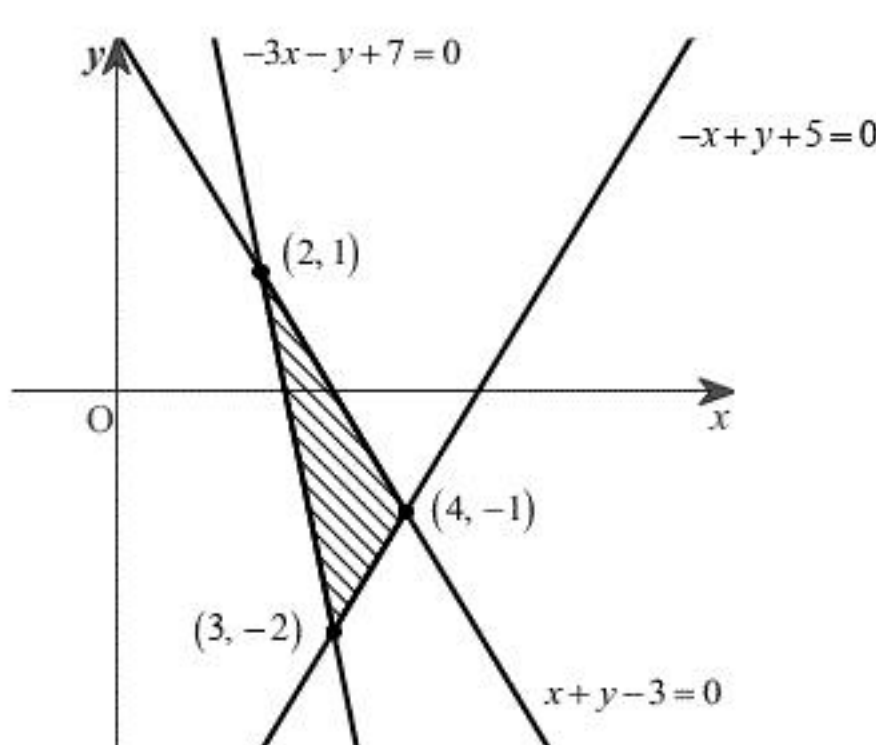
$$\begin{cases} -x+y+5 \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \\ -3x-y+7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-5 \\ y \leq -x+3 \\ y \geq -3x+7 \end{cases}$$

より、領域 D は直線 $-x+y+5=0$ を含んでそれより上側にあり、直線 $x+y-3=0$ を含んでそれより下側にあり、かつ直線 $-3x-y+7=0$ を含んでそれより上側にある点の集合であるといえる。また、これらの直線の交点を求めると、

$$\begin{aligned} & -x+y+5=0 \text{ かつ } x+y-3=0 \\ & \Leftrightarrow (x, y) = (4, -1) \\ & -x+y+5=0 \text{ かつ } -3x-y+7=0 \\ & \Leftrightarrow (x, y) = (3, -2) \\ & x+y-3=0 \text{ かつ } -3x-y+7=0 \\ & \Leftrightarrow (x, y) = (2, 1) \end{aligned}$$

となる。よって、領域 D を図示すると、次図の斜線部のようになる。なお、境界は全て含む。



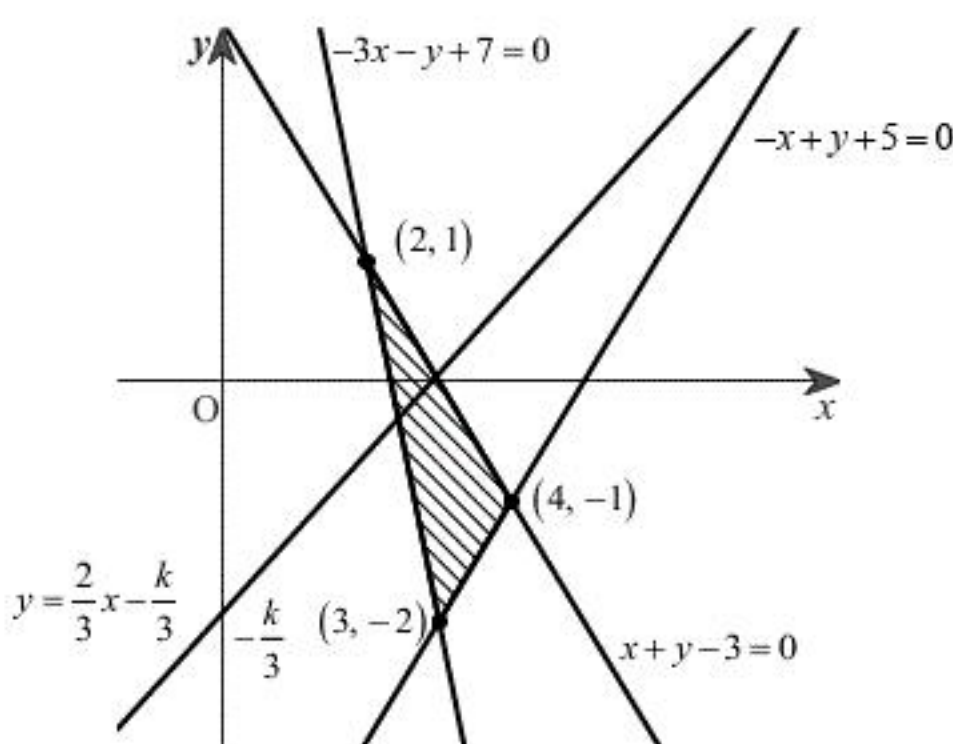
(答) 前図 (境界は全て含む)

(2)

k を実数とし、 $2x-3y=k$ とおく。このとき、

$$2x-3y=k \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{k}{3}$$

は、 xy 平面上で傾き $\frac{2}{3}$ 、 y 切片 $-\frac{k}{3}$ の直線を表す。よって、求める値は、直線 $2x-3y=k$ と領域 D が共有点をもつときの k の最小値である。領域 D および直線 $2x-3y=k$ を図示すると、次図のようになる。



図より、 k が最小値をとるのは、直線 $2x-3y=k$ の y 切片 $-\frac{k}{3}$ が最大になるとき、すなわち、直線 $2x-3y=k$ が点 $(2, 1)$ を通るときである。よって、 $(x, y) = (2, 1)$ のとき、 $2x-3y$ は最小値 1 をとる。

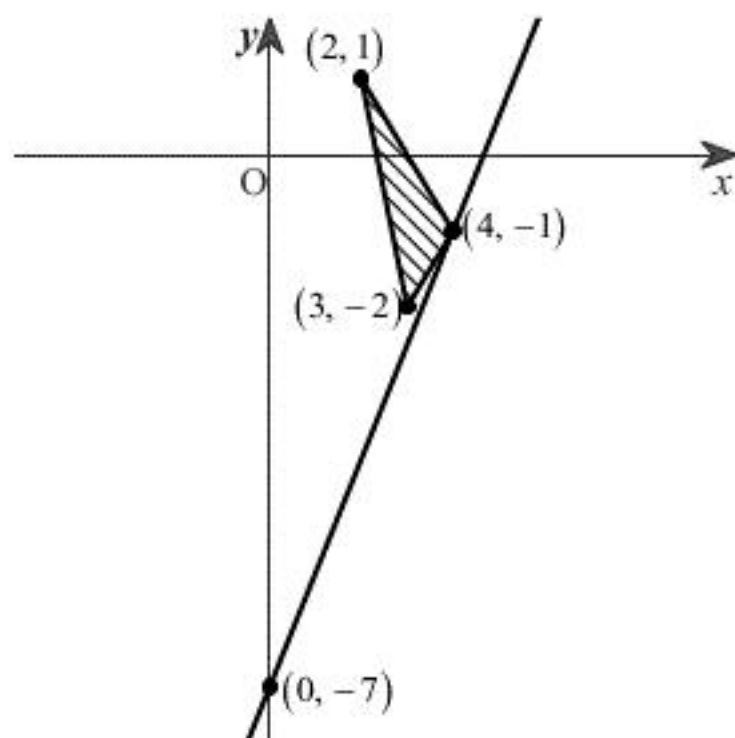
(答) $(x, y) = (2, 1)$ のとき、最小値 1

(3)

ℓ を実数とし、 $\frac{y+7}{x} = \ell$ とおく。このとき、

$$\frac{y+7}{x} = \ell \Leftrightarrow y = \ell x - 7 \quad (x \neq 0)$$

は点 $(0, -7)$ を除いた傾き ℓ 、 y 切片 -7 の直線を表す。よって、求める値は、直線 $y = \ell x - 7$ と領域 D が共有点をもつときの ℓ の最小値である。 ℓ が最小値をとるのは、傾き ℓ が最も小さいとき、すなわち、次図のように直線 $y = \ell x - 7$ が点 $(4, -1)$ を通るときである。



よって、 $(x, y) = (4, -1)$ のとき、 $\frac{y+7}{x}$ は最小値 $\frac{3}{2}$ をとる。

(答) $(x, y) = (4, -1)$ のとき、最小値 $\frac{3}{2}$

〔Ⅱ〕

(1)

以下, ℓ の値で場合分けを行う。

[1] $\ell=0$ のとき

$a=7$ となる球の取り出し方は存在しない。よって, 不適である。

[2] $\ell=1$ のとき

$a=7$ となる球の取り出し方は存在しない。よって, 不適である。

[3] $\ell=2$ のとき

$a=7$ となるとき, 3 が書かれた球を 1 個, 2 が書かれた球を 2 個取り出せばよいから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_8C_3} = \frac{1}{224}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より, 求める確率は $\frac{1}{224}$ である。

(答) $\frac{1}{224}$

(2)

[1] $\ell=0$ のとき

$a=1$ となるとき, 1 が書かれた球を 1 個取り出せばよいから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_3C_1}{{}_8C_1} = \frac{3}{32}$$

である。

[2] $\ell=1$ のとき

$a=1$ となるとき, 0 が書かれた球を 1 個, 1 が書かれた球を 1 個取り出せばよいから, その確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

となる。

[3] $\ell=2$ のとき

$a=1$ となるとき, 0 が書かれた球を 2 個, 1 が書かれた球を 1 個取り出せばよいから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_8C_3} = \frac{3}{224}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より, 求める確率は $\frac{3}{32} + \frac{3}{28} + \frac{3}{224} = \frac{3}{14}$ である。

(答) $\frac{3}{14}$

(3)

[1] $\ell=0$ のとき

$a=3$ となるとき, 3 が書かれた球を 1 個取り出せばよいから, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_1C_1}{{}_8C_1} = \frac{1}{32}$$

である。

[2] $\ell=1$ のとき

$a=3$ となるとき, 0 が書かれた球と 3 が書かれた球を 1 個ずつ, もしくは, 1 が書かれた球と 2 が書かれた球を 1 個ずつ取り出せばよいから, その確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_1C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_8C_2} = \frac{1}{7}$$

となる。

[3] $\ell=2$ のとき

$a=3$ となるとき, 0 が書かれた球を 2 個と 3 が書かれた球を 1 個, もしくは, 0 が書かれた球と 1 が書かれた球, 2 が書かれた球を 1 個ずつ, または, 1 が書かれた球を 3 個取り出せばよい。したがって, その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_1C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_3C_3}{{}_8C_3} = \frac{1}{16}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より, 求める確率は $\frac{1}{32} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} = \frac{53}{224}$ である。

(答) $\frac{53}{224}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} &|2x^2 - 2x| = |2x(x-1)| \\ &= \begin{cases} 2x^2 - 2x & (x < 0, 1 \leq x) \\ -2x^2 + 2x & (0 \leq x < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

である。以下、 x の範囲で場合分けを行い、 $f(x) = 1$ を満たす実数 x を求める。

[1] $x < 0, 1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - |2x^2 - 2x| \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x - (2x^2 - 2x) \\ &= x^3 - 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x) = 1$ となるとき、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x &= 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x < 0, 1 \leq x) \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - |2x^2 - 2x| \\ &= x^3 - 2x^2 + 2x - (-2x^2 + 2x) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x) = 1$ となるとき、

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x < 1$ よりこの方程式の解は存在しない。

以上、[1], [2]より、求める値は $x = 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ である。

(答) $x = 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(2)

(1)より、

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x & (x < 0, 1 \leq x) \\ x^3 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

である。ここで、

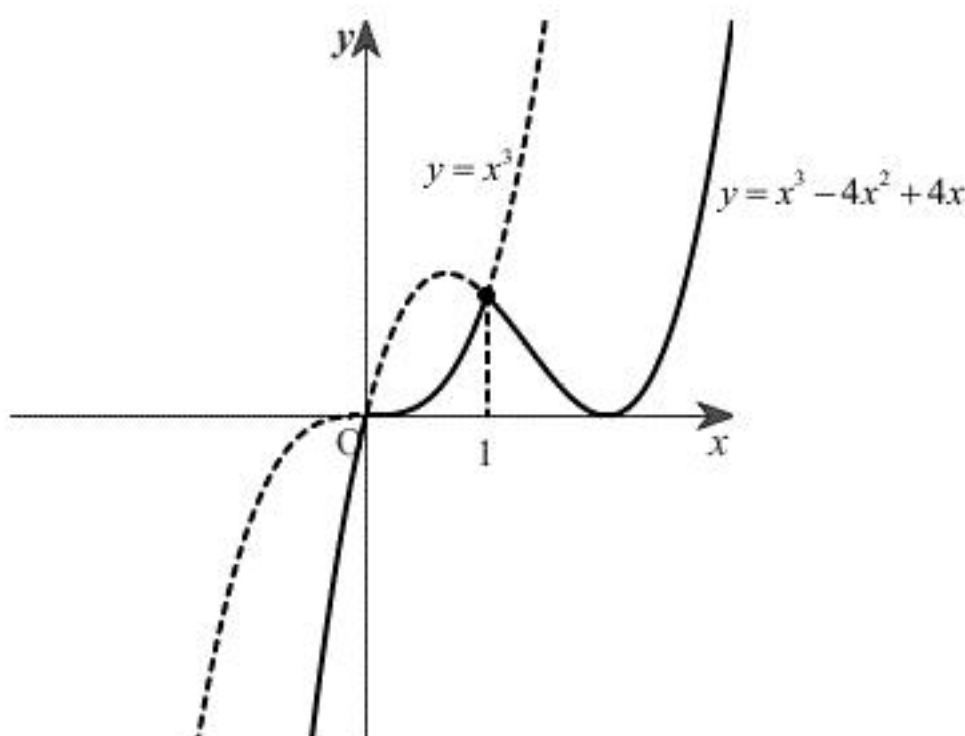
$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\begin{aligned} (x^3 - 4x^2 + 4x)' &= 3x^2 - 8x + 4 \\ &= (x-2)(3x-2) \end{aligned}$$

より $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+		+		-	0	+
$f(x)$		0		1		0	

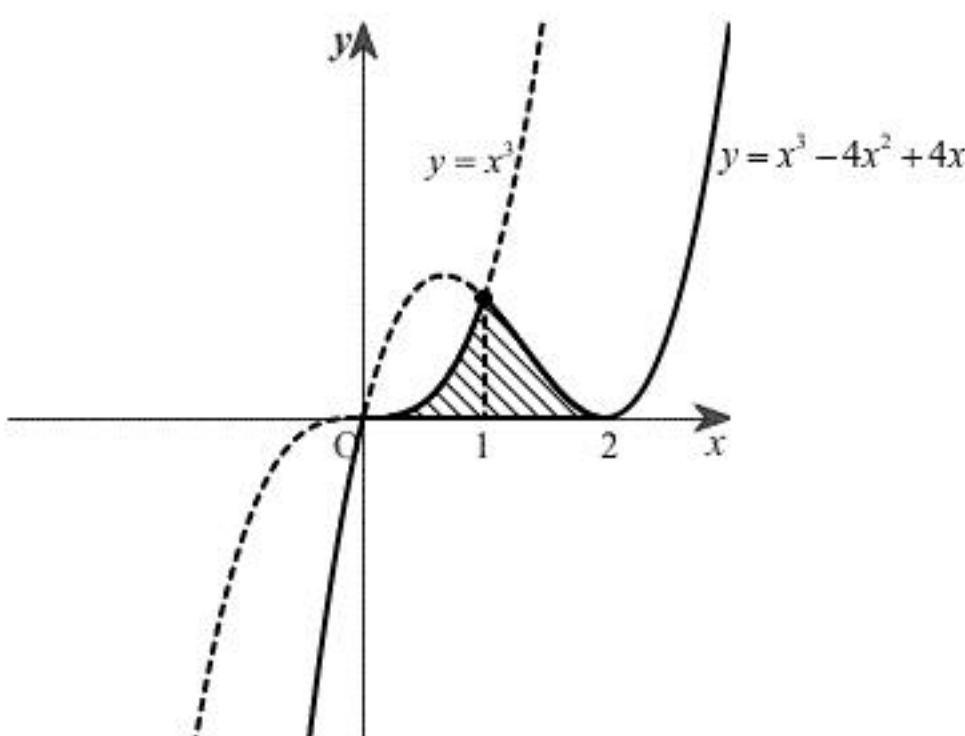
よって、 $y = f(x)$ を図示すると、次図の実線のようになる。



(答) 前図

(3)

求める面積は次図の斜線部の面積である。



上図より、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} - 0 + \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2 \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$