

【I】

(1)

$f(x)$ について、

$$f(x) = x(x-p)(x-q) = x^3 - (p+q)x^2 + pqx$$

であり、

$$f'(x) = 3x^2 - 2(p+q)x + pq$$

である。よって、 $f(x)$ が $x = \frac{2}{3}$ と $x = 3$ で極値をとることから、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(p+q) + pq = 0 \\ 27 - 6(p+q) + pq = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{77}{3} + \frac{14}{3}(p+q) = 0 \\ 27 - 6(p+q) + pq = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} p+q = \frac{11}{2} \\ pq = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p+q = \frac{11}{2}, \quad pq = 6$$

(2)

$p+q = \frac{11}{2}$, $pq = 6$ より、解と係数の関係から、 p, q は t についての 2 次方程式 $t^2 - \frac{11}{2}t + 6 = 0$ の 2 解である。

$$\begin{aligned} & t^2 - \frac{11}{2}t + 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2t^2 - 11t + 12 = 0 \\ & \Leftrightarrow (2t-3)(t-4) = 0 \\ & \therefore t = \frac{3}{2}, 4 \end{aligned}$$

であり、 $0 < p < q$ より、 $(p, q) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ である。ゆえに、 $f(x) = x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4)$ である。ま

た、3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数は正であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{2}{3}$ のときに極大値、 $x = 3$ のときに極小値をとる。従って

$$f(3) = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) = -\frac{9}{2}$$

より、 $f(x)$ の極小値は $-\frac{9}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad (p, q) = \left(\frac{3}{2}, 4\right), \quad x = 3 \text{ のとき極小値 } -\frac{9}{2}$$

(3)

(2) より、 $q = 4$ であり、 $f'(x) = (3x-2)(x-3)$ である。また、点 $(4, 0)$ における F の接線 ℓ_1 の傾きは、

$$f'(4) = 10$$

である。従って、 ℓ_1 に平行な直線 ℓ_2 の傾きは 10 である。ここで、直線 ℓ_2 と F との接点を

$(t_2, f(t_2))$ とすると $(t_2 \neq 4)$ 、

$$\begin{aligned} & f'(t_2) = 10 \\ & \Leftrightarrow 3t_2^2 - 11t_2 + 6 = 10 \\ & \Leftrightarrow (t_2 - 4)(3t_2 + 1) = 0 \\ & \therefore t_2 = -\frac{1}{3} \quad (\because t_2 \neq 4) \end{aligned}$$

より、直線 ℓ_2 と F との接点の座標は $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{143}{54}\right)$ であり、 ℓ_2 の方程式は

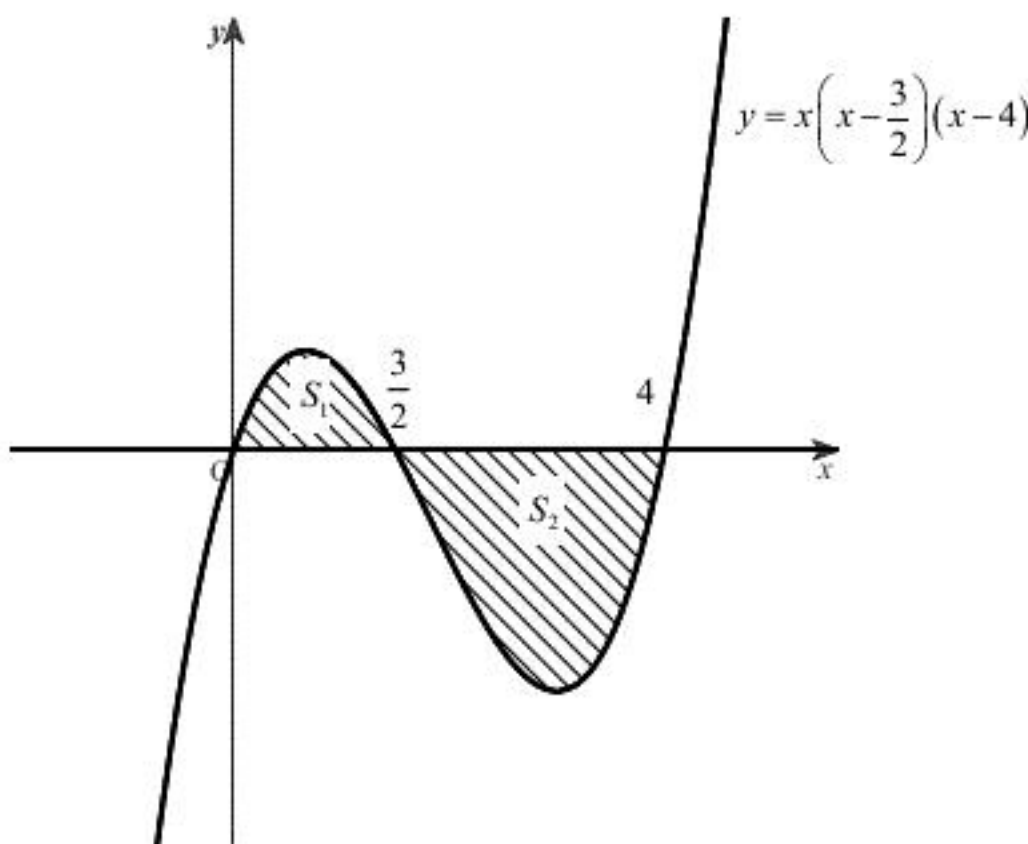
$$y = 10\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{143}{54} = 10x + \frac{37}{54}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 10x + \frac{37}{54}$$

(4)

F と x 軸で囲まれた領域を図示すると、下図の斜線部のようになる。



斜線部のうち、 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ の部分の面積を S_1 、 $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$ の部分の面積を S_2 とすると、

$$\begin{aligned} |S_1 - S_2| &= \left| \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{3}{2}}^4 \{-f(x)\} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^4 f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^4 f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^4 x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4) dx \right| \\ &= \left| \int_0^4 \left(x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 6x\right) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{6}x^3 + 3x^2 \right]_0^4 \right| \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{16}{3}$$

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \log_4 a_{n+1} - \log_2 a_n = \log_2 \sqrt{3} \text{ より,} \\ \log_4 a_2 &= \log_2 a_1 + \log_2 \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \log_4 a_2 &= \log_4 (3a_1^2) \\ \Leftrightarrow a_2 &= 3 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \log_4 a_3 &= \log_2 a_2 + \log_2 \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \log_4 a_3 &= \log_4 (3a_2^2) \\ \Leftrightarrow a_3 &= 27 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2 = 3, a_3 = 27$

(2)

真数条件より, $a_n > 0$ である。与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} \log_4 a_{n+1} - \log_2 a_n &= \log_2 \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \log_4 a_{n+1} &= \log_2 a_n + \log_2 \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \log_4 a_{n+1} &= \log_4 (3a_n^2) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 3a_n^2 \end{aligned}$$

である。この漸化式は, $a_1 = 1$ より $n = 1, 2, 3, \dots$ で $a_n > 0$ を満たす。

(答) $a_{n+1} = 3a_n^2$

(3)

(2)より, $a_{n+1} = 3a_n^2$ であるから,

$$\begin{aligned} 3^{b_{n+1}} &= 3 \cdot (3^{b_n})^2 \\ \Leftrightarrow 3^{b_{n+1}} &= 3^{2b_n+1} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 2b_n + 1 \end{aligned}$$

となる。ゆえに, $b_1 = \log_3 a_1 = 0$ より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \\ \Leftrightarrow b_n + 1 &= 2^{n-1} \cdot (b_1 + 1) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $b_n = 2^{n-1} - 1$

(4)

$a_n > 10^8$ を満たす最小の n を求める。(3)より, $a_n = 3^{b_n} = 3^{2^{n-1}-1}$ であるから, $10 > 1$ に注意して両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned} a_n &> 10^8 \\ \Leftrightarrow \log_{10} a_n &> 8 \\ \Leftrightarrow (2^{n-1} - 1) \log_{10} 3 &> 8 \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} - 1 &> \frac{8}{\log_{10} 3} \\ \Leftrightarrow 2^{n-1} &> \frac{8}{\log_{10} 3} + 1 \end{aligned}$$

となる。 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を代入すると,

$$2^{n-1} > \frac{8}{0.4771} + 1$$

である。ここで

$$\begin{aligned} 16 &< \frac{8}{0.4771} < 17 \\ \Leftrightarrow 17 &< \frac{8}{0.4771} + 1 < 18 \end{aligned}$$

であるから,

$$2^{n-1} \geq 18$$

を満たす最小の n を求めればよい。 $2^4 = 16, 2^5 = 32$ であるから, 求める n は $n = 6$ である。

(答) $n = 6$

〔Ⅲ〕

(1)

以下、5人の候補者の得票数を大きい順に v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 とする。このとき、条件よりこれら5つの値の和は40であり、候補者が自分に投票することから、 $v_1 \sim v_5$ は1以上の整数である。すなわち、 $v_1 \sim v_5$ は

$$v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq v_4 \geq v_5 \geq 1, \quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 40$$

を満たす。3人の当選者が確定するとき、

$$v_1 \geq v_2 \geq v_3 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

となればよい。このとき、 v_2, v_3, v_4, v_5 がそれぞれ最小値をとるときに v_1 は最大値をとるので、 $v_4 = v_5 = 1, v_2 = v_3 = 2$ のときに最大値34をとる。

(答) 34 票

(2)

(1)と同様、3人の当選者が確定するとき、

$$v_1 \geq v_2 \geq v_3 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

となればよい。 v_4 が最大値をとるとき、 $v_5 = 1$ を考えればよい。このとき、

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 39, \quad v_1 \geq v_2 \geq v_3 > v_4 \geq 1$$

を満たし、

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &> 4v_4 \\ \Leftrightarrow 39 &> 4v_4 \\ \Leftrightarrow v_4 &< \frac{39}{4} \end{aligned}$$

より、 $v_4 \leq 9$ である。ここで、 $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (10, 10, 10, 9)$ のときに $v_4 = 9$ をとるから、 v_4 の最大値は9である。

(答) 9 票

(3)

5人の候補者A, B, C, D, Eの自分の投票を除いた得票数をそれぞれ a, b, c, d, e とする。このとき、 a, b, c, d, e は

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0, \quad d \geq 0, \quad e \geq 0, \quad a + b + c + d + e = 35 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数である。5人の候補者の得票数の票の出方は、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b, c, d, e) の組み合わせの数に等しい。これは、異なる5種類のものから重複を許して35個とる組み合わせの総数であるから、

$${}_5H_{35} = {}_{5+35-1}C_{35} = {}_{39}C_{35} = {}_{39}C_4 = 82251 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 82251 通り

(4)(i)

3人の当選者が確定し、かつ、当選者の得票数が全て同数となるとき、

$$v_1 = v_2 = v_3 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

となればよい。このとき、

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= 40 \\ \Leftrightarrow 3v_1 + v_4 + v_5 &= 40 \\ \Leftrightarrow 3v_1 &= 40 - (v_4 + v_5) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 40 - (v_4 + v_5) &\leq 38 \\ \Leftrightarrow v_1 &\leq \frac{38}{3} \\ \therefore v_1 &\leq 12 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $v_1 = 12$ とすると、

$$v_4 + v_5 = 4, \quad 12 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

より、 $(v_4, v_5) = (3, 1), (2, 2)$ である。従って、 $(v_4, v_5) = (3, 1), (2, 2)$ のとき、 v_1 は最大値12をとる。このとき、 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (12, 12, 12, 3, 1), (12, 12, 12, 2, 2)$ のいずれかである。

[1] $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (12, 12, 12, 3, 1)$ のとき

5人の候補者A, B, C, D, Eの得票数が $(12, 12, 12, 3, 1)$ となる場合の数を求める。これは、5つの数 $(12, 12, 12, 3, 1)$ の並び替えの場合の数に等しく、

$$\frac{5!}{3!1!1!} = 20 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (12, 12, 12, 2, 2)$ のとき

5人の候補者A, B, C, D, Eの得票数が $(12, 12, 12, 2, 2)$ となる場合の数を求める。これは、5つの数 $(12, 12, 12, 2, 2)$ の並び替えの場合の数に等しく、

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2]より、3人の当選者の得票数が12となる票の出方は

$$20 + 10 = 30 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 12 票, 30 通り

(ii)

(i)より、 $v_1 \leq 12$ である。また、

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &< 5v_1 \\ \Leftrightarrow 40 &< 5v_1 \\ \Leftrightarrow v_1 &> 8 \end{aligned}$$

より、 $9 \leq v_1 \leq 12$ である。

[1] $v_1 = 12$ のとき

(i)より、このような票の出方は30通りである。

[2] $v_1 = 11$ のとき

このとき、

$$v_4 + v_5 = 7, \quad 11 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

より、 $(v_4, v_5) = (6, 1), (5, 2), (4, 3)$ である。(i)の[1]と同様に、 $v_4 \neq v_5$ の組み合わせについては、それぞれ20通りの並び替え方が存在する。ゆえに、 $v_1 = 11$ となる票の出方は、

$$20 \cdot 3 = 60 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $v_1 = 10$ のとき

このとき、

$$v_4 + v_5 = 10, \quad 10 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

より、 $(v_4, v_5) = (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4), (5, 5)$ である。(i)の[2]と同様に、 $(v_4, v_5) = (5, 5)$ のとき、票の出方は10通りである。 $v_4 \neq v_5$ の組み合わせについては、それぞれ20通りの並び替え方が存在する。ゆえに、 $v_1 = 10$ となる票の出方は、

$$10 + 20 \cdot 4 = 90 \text{ (通り)}$$

である。

[4] $v_1 = 9$ のとき

このとき、

$$v_4 + v_5 = 13, \quad 9 > v_4 \geq v_5 \geq 1$$

より、 $(v_4, v_5) = (8, 5), (7, 6)$ である。 $v_4 \neq v_5$ の組み合わせについては、それぞれ20通りの並び替え方が存在する。ゆえに、 $v_1 = 9$ となる票の出方は、

$$20 \cdot 2 = 40 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、当選者の得票数が同数となる場合の票の出方は、全部で

$$30 + 60 + 90 + 40 = 220 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 220 通り