

【I】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ					
	4	2	6	0					
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	5	1	5	3	5	2	3	7	8
(3)	セ	ソ	タ	チ					
	1	6	1	0					

〔解説〕

(1)

$$1 \leq 7m+2 \leq 300$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{7} \leq m \leq \frac{298}{7} = 42 + \frac{4}{7}$$

であり、 m は正の整数であるため、 $1 \leq m \leq 42$ となる。よって、 P の要素の個数は42である。また、

$$1 \leq 5n-3 \leq 300$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq n \leq \frac{303}{5} = 60 + \frac{3}{5}$$

であり、 n は正の整数であるため、 $1 \leq n \leq 60$ となる。よって、 Q の要素の個数は60である。

(2)

$a \in P \cap Q$ とすると、 $a \in P$ であるため、ある正の整数 i ($2 \leq i \leq 43$)が存在し、

$$a = 7(i-1)+2$$

$$= 7i-5$$

が成り立つ。よって、 $a+5=7i$ であるため、 $a+5$ は7の倍数である。また、 $a \in Q$ であるため、ある正の整数 j ($1 \leq j \leq 60$)が存在し、 $a=5j-3$ が成り立つ。よって、

$$7i-5=5j-3$$

$$\Leftrightarrow 5j=5i+2(i-1)$$

となる。2と5は互いに素であるため、上式より $i-1$ は5の倍数である。 k を $i-1=5k$ を満たす整数とすると、 $i=5k+1$ であるため、

$$a = 7i-5$$

$$= 7(5k+1)-5$$

$$= 35k+2$$

となる。ここで、 $2 \leq i \leq 43$ より、

$$2 \leq i \leq 43$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 5k+1 \leq 43$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq k \leq \frac{42}{5} = 8 + \frac{2}{5}$$

であり、 k は整数であるため、 $1 \leq k \leq 8$ となる。よって、 $P \cap Q$ の要素で最も小さい整数は $35 \cdot 1+2=37$ であり、 $P \cap Q$ の要素の個数は8である。

(3)

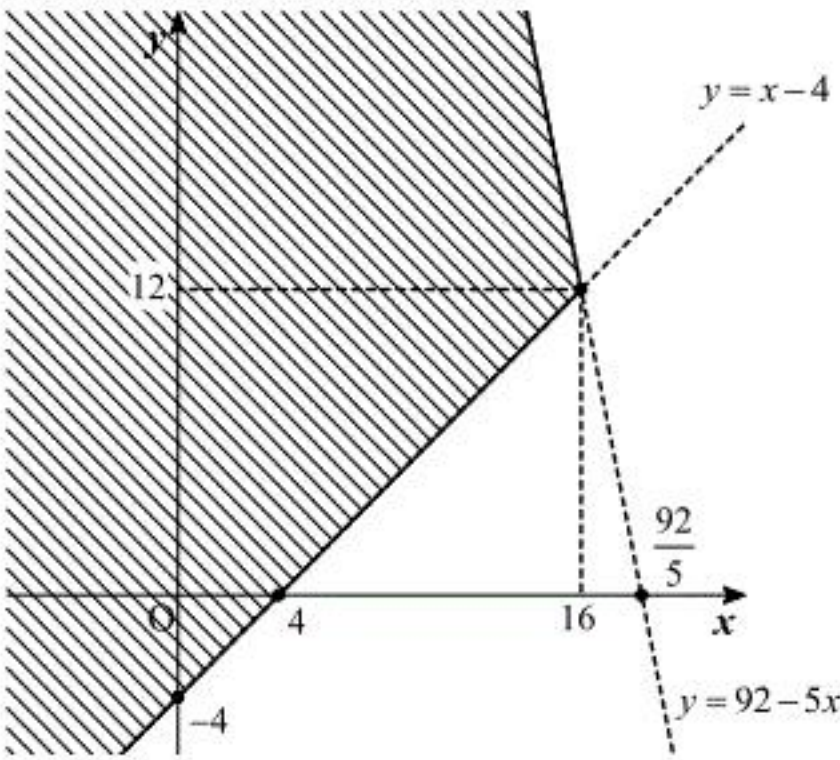
$$x-4=92-5x$$

$$\therefore x=16$$

となるため、直線 $y=x-4$ と直線 $y=92-5x$ の交点は $(16, 12)$ である。よって、領域

$$D = \{(x, y) \mid x-4 \leq y \leq 92-5x\}$$

は下図の斜線部である。ただし、境界を含む。



上図より、 D に含まれる点 (x, y) の x 座標の最大値は、16である。ここで、点 $(x, y) \in D$ が $x \in P, y \in Q$ を満たすとする。このとき、 $(x, y) \in D$ より、 $x \leq 16$ である。また、 $x \in P$ より、ある正の整数 m ($1 \leq m \leq 42$)が存在し、 $x=7m+2$ となる。よって、

$$x \leq 16$$

$$\Leftrightarrow 7m+2 \leq 16$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

$$\therefore m=1, 2 \left(\because 1 \leq m \leq 42 \right)$$

であるため、 $x=9, 16$ となる。 $x=9$ のとき、 $(x, y) \in D$ より、

$$9-4 \leq y \leq 92-5 \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq y \leq 47$$

であり、 $y \in Q$ より、ある正の整数 n ($1 \leq n \leq 60$)が存在し、 $y=5n-3$ となる。よって、

$$5 \leq 5n-3 \leq 47$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \leq n \leq 10$$

であり、 n は $1 \leq n \leq 60$ を満たす整数であるため、 $2 \leq n \leq 10$ となる。また、 $x=16$ のとき、 $(x, y) \in D$ より、 $y=12$ である。また、 $12=5 \cdot 3-3, 1 \leq 3 \leq 60$ より、 $12 \in Q$ である。以上より、

$$\{(x, y) \in D \mid x \in P, y \in Q\} = \{(9, 5n-3) \mid n \text{ は正の整数, } 2 \leq n \leq 10\} \cup \{(16, 12)\}$$

であるため、 D に含まれる点 (x, y) で、 $x \in P$ および $y \in Q$ である点の個数は、

$$9+1=10$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
2	9	2	⑦	2
カ	キ	ク	ケ	コ
4	9	2	3	4
サ	シ	ス	セ	ソ
3	4	3	2	3
タ	チ	ツ	テ	
3	2	3	4	

〔解説〕

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおくと, $OA=OB=2$, $OC=3$ より, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ である。また,

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$ であるため, $AB=BC=CA=2$ より,

$$\begin{aligned}|\vec{b}-\vec{a}| &= 2 \\ \Leftrightarrow |\vec{b}-\vec{a}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2 &= 4 \\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} &= 2 \\ |\vec{c}-\vec{b}| &= 2 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}-\vec{b}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 3^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2^2 &= 4 \\ \therefore \vec{b}\cdot\vec{c} &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow |\vec{a}-\vec{c}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+3^2 &= 4 \\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{c} &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} \\ &= \overrightarrow{OC} + x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} \\ &= \vec{c} + x(\vec{a}-\vec{c}) + y(\vec{b}-\vec{c}) \\ &= x\vec{a} + y\vec{b} + (1-x-y)\vec{c}\end{aligned}$$

であるため,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BA} &= \{x\vec{a} + y\vec{b} + (1-x-y)\vec{c}\}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= x\vec{a}\cdot\vec{a} + y\vec{b}\cdot\vec{a} + (1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} - x\vec{a}\cdot\vec{b} - y\vec{b}\cdot\vec{b} - (1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{b} \\ &= x|\vec{a}|^2 - y|\vec{b}|^2 - (x-y)\vec{a}\cdot\vec{b} - (1-x-y)\vec{b}\cdot\vec{c} + (1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 4x - 4y - 2(x-y) - \frac{9}{2}(1-x-y) + \frac{9}{2}(1-x-y) \\ &= 2x - 2y \\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA} &= \{x\vec{a} + y\vec{b} + (1-x-y)\vec{c}\}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) \\ &= x\vec{a}\cdot\vec{a} + y\vec{b}\cdot\vec{a} + (1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} - x\vec{a}\cdot\vec{c} - y\vec{b}\cdot\vec{c} - (1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{c} \\ &= x|\vec{a}|^2 - (1-x-y)|\vec{c}|^2 + y\vec{a}\cdot\vec{b} - y\vec{b}\cdot\vec{c} + (1-2x-y)\vec{a}\cdot\vec{c} \\ &= 4x - 9(1-x-y) + 2y - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}(1-2x-y) \\ &= 4x + 2y - \frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるため,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BA} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= x\end{aligned}$$

となり, $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$ が垂直であるため,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x + 2y - \frac{9}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x + 4y &= 9\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{cases} y = x \\ 8x + 4y = 9 \end{cases} \\ \therefore x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}$$

であるため, $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ となる。ここで, 点 M は直線 CH 上にあるため, k を実数と

して, $\overrightarrow{CM}=k\overrightarrow{CH}$ と表される。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= k\overrightarrow{CH} \\ &= \frac{3}{4}k\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}k\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

となる。また, 点 M は直線 AB 上にあるため,

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}k + \frac{3}{4}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CH} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CH} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

となるため, 点 M は線分 AB の中点である。さらに, $\triangle ABC$ は正三角形であるため,

$$\begin{aligned}CM &= AC\cos\frac{\pi}{6} \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}CH &= \frac{3}{2}CM \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。また, $\angle OHC=\frac{\pi}{2}$ であり,

$$OC:CH=3:\frac{3\sqrt{3}}{2}=2:\sqrt{3}$$

となるため, $\triangle OHC$ において三平方の定理を考えると, $OH:OC=1:2$ であるから,

$$\begin{aligned}OH &= \frac{1}{2}OC \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。さらに, $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$ より,

$$\begin{aligned}MH &= \frac{1}{2}CM \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であり, $\angle AMH=\frac{\pi}{2}$ より, $\triangle ABH$ の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot AB\cdot MH &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるため, 四面体 OABH の体積は $\triangle ABH$ を底面, OH を高さとして考えると,

$$\frac{1}{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)		ア	イ			
		3	4			
(2)		ウ	エ	オ	カ	
		1	3	2	8	
(3)	(i)	キ	ク			
		1	4			
	(ii)	ケ	コ	サ	シ	
		3	1	5	6	
(4)		ス	セ	ソ	タ	チ
		1	4	2	9	8
		ツ	テ	ト	ナ	ニ
		4	2	1	2	9

【解説】

- (1)
- 袋からカードを1枚取り出す場合の数は8通りである。また、取り出したカードに書かれた整数が正の数である場合は、1, 2, 3, 4のいずれかが書かれたカードを取り出す場合であり、場合の数は6通りである。よって、求める確率は、
- $$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$
- である。
- (2)
- 袋からカードを同時に2枚取り出す場合の数は、 ${}_8C_2=28$ (通り)である。ここで、取り出したカードの少なくとも1枚に1が書かれている事象の余事象の確率、すなわち、取り出した2枚のカードのどちらにも1が書かれていない確率を考える。この場合は、0, 2, 3, 4が書かれている6枚のカードから2枚のカードを取り出す場合であるため、余事象の場合の数は、 ${}_6C_2=15$ (通り)である。よって、余事象の確率は $\frac{15}{28}$ となるため、求める確率は、
- $$1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$$
- である。
- (3) (i)
- 袋からカードを1枚取り出し、取り出したカードを袋に戻さずに、袋からもう1枚カードを取り出す場合の数は、 $8\cdot 7=56$ (通り)である。また、 $a+b\geq 5$ である場合は、 $a+b=5, 6, 7$ となる場合である。ここで、 $a+b=5$ となるとき、
- $$(a, b)=(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$$
- であるため、 $a+b=5$ となる場合の数は、
- $$2\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2=8$$
- より、8通りである。また、 $a+b=6$ となるとき、
- $$(a, b)=(2, 4), (4, 2)$$
- であるため、 $a+b=6$ となる場合の数は、
- $$2\cdot 1+1\cdot 2=4$$
- より、4通りである。さらに、 $a+b=7$ となるとき、
- $$(a, b)=(3, 4), (4, 3)$$
- であるため、 $a+b=7$ となる場合の数は、
- $$1\cdot 1+1\cdot 1=2$$
- より、2通りである。以上より、 $a+b\geq 5$ となる場合の数は、
- $$8+4+2=14$$
- より、14通りであるため、求める確率は、
- $$\frac{14}{56}=\frac{1}{4}$$
- である。
- (ii)
- $b\geq a$ となるとき、
- $$(a, b)=(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$$
- であるため、 $b\geq a$ となる場合の数は、
- $$2\cdot (1+2+2+1+1)+2\cdot (1+2+1+1)+2\cdot (1+1+1)+1\cdot 1=31$$
- より、31通りである。よって、求める確率は $\frac{31}{56}$ である。
- (4)
- 袋からカードを1枚取り出し、取り出したカードを袋に戻さずに、袋からもう1枚カードを取り出し、取り出した2枚のカードを袋に戻さずに、さらに袋からもう1枚カードを取り出す場合の数は、 $8\cdot 7\cdot 6=336$ (通り)である。ここで、 a が2でなく、かつ $m\geq 221$ であるとき、 $a=3, 4$ であるため、 a が2でなく、かつ $m\geq 221$ である確率を Q とすると、
- $$Q=\frac{1+1}{8}=\frac{1}{4}$$
- である。また、 $a=2$ であり、かつ $m\geq 221$ であるとき、 $(b, c)=(2, 1), (2, 3), (2, 4)$ 、または、 $b=3, 4$ である。 $a=2$ であり、かつ $(b, c)=(2, 1), (2, 3), (2, 4)$ となる場合の数は、
- $$2\cdot 1\cdot (2+1+1)=8$$
- より、8通りである。さらに、 $a=2$ であり、かつ $b=3, 4$ となる場合の数は、
- $$2\cdot (1+1)\cdot 6=24$$
- より、24通りである。以上より、 $a=2$ であり、かつ $m\geq 221$ である場合の数は、
- $$8+24=32$$
- より、32通りであるため、 $a=2$ であり、かつ $m\geq 221$ である確率は、
- $$\frac{32}{336}=\frac{2}{21}$$
- である。したがって、
- $$P=\frac{1}{4}+\frac{2}{21}=\frac{29}{84}$$
- である。また、 $m\geq 221$ であったとき、 a が2でない確率は、
- $$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{84}}=\frac{21}{29}$$
- である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
3	8	3	3	1	3	④	6	8
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
1	0	－	1	2	9	1	2	

〔解説〕

$$f(x)=x^3+4x^2-3x+a \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+8x-3 \\ &= 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= -3, \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であるため、関数 $f(x)$ の増減は下表の通りである。

x	...	-3	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-3)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ であるため、上表より、 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ は $f(x)$ の極小値であるが、最小値ではない。ここで、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3+4\cdot 1^2-3\cdot 1+a \\ &= a+2 \\ f'(1) &= 3\cdot 1^2+8\cdot 1-3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

より、曲線 $y=f(x)$ の、点 $(1, f(1))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(x)(x-1)+f(1) \\ &= 8(x-1)+a+2 \\ &= 8x+a-6 \end{aligned}$$

である。よって、曲線 $y=f(x)$ の、点 $(1, f(1))$ における接線が原点を通るとき、

$$\begin{aligned} 0 &= 8\cdot 0+a-6 \\ \Leftrightarrow a &= 6 \end{aligned}$$

であり、接線の方程式は $y=8x$ である。 $a=6$ のとき、

$$\begin{aligned} C: y &= f(x) = x^3+4x^2-3x+6 \\ P(1, 8), \ell: y &= 8x \end{aligned}$$

である。ここで、 $g(x)=-x^2+bx+c$ より、

$$\begin{aligned} g(1) &= -1^2+b\cdot 1+c \\ &= b+c-1 \\ g'(x) &= -2x+b \\ g'(1) &= -2\cdot 1+b \\ &= b-2 \end{aligned}$$

である。曲線 $y=g(x)=-x^2+bx+c$ が点 $P(1, 8)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} g(1) &= 8 \\ \Leftrightarrow b+c-1 &= 8 \\ \therefore c &= -b+9 \end{aligned}$$

である。また、曲線 $y=g(x)$ の、 P における接線の方程式は $y=g'(1)(x-1)+8$ である。この接線が ℓ と一致するため、

$$\begin{aligned} g'(1) &= 8 \\ \Leftrightarrow b-2 &= 8 \\ \therefore b &= 10 \end{aligned}$$

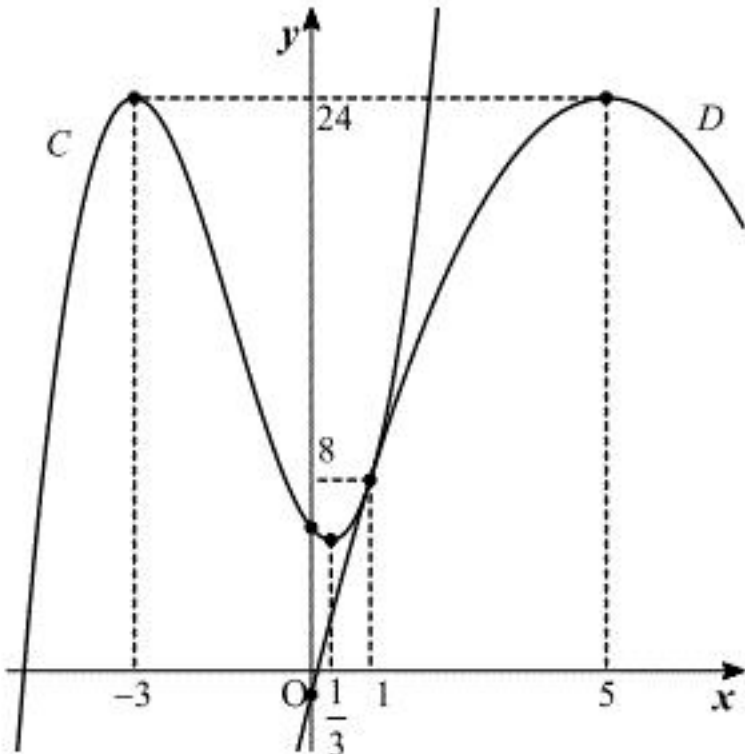
である。また、

$$\begin{aligned} c &= -b+9 \\ &= -10+9 \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $b=10, c=-1$ のとき、

$$D: y=g(x)=-x^2+10x-1$$

である。また、2 曲線 C, D は下図の通りである。



上図より、2 曲線 C, D と 2 直線 $x=0, x=1$ で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx &= \int_0^1 \left\{ (x^3+4x^2-3x+6) - (-x^2+10x-1) \right\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3+5x^2-13x+7) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 7x \right]_0^1 \\ &= \frac{29}{12} \end{aligned}$$

である。

〔V〕

〔解説〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
0	2	2	2	2	③	①	②	③
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
2	③	2	4	④	2	5	2	

〔解答〕

数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = -4$ であり、漸化式 $a_n = 2a_{n-1} + 2n \ (n \geq 2)$ を満たすため、

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 2 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (-4) + 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_{n+1} - a_n = b_n \ (n \geq 1)$ より、数列 $\{b_n\}$ の初項は

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= -4 - (-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。また、 $n \geq 2$ のとき、漸化式

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2a_n + 2(n+1)\} - (2a_{n-1} + 2n) \\ &= 2(a_n - a_{n-1}) + 2 \\ &= 2b_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned} b_2 &= 2b_1 + 2 \\ &= 2 \cdot 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるため、 $b_{n+1} - b_n = c_n \ (n \geq 1)$ より、数列 $\{c_n\}$ の初項は

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_1 \\ &= 2 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。また、 $n \geq 2$ のとき、漸化式

$$\begin{aligned} c_n &= b_{n+1} - b_n \\ &= (2b_n + 2) - (2b_{n-1} + 2) \\ &= 2(b_n - b_{n-1}) \\ &= 2c_{n-1} \end{aligned}$$

を満たす。よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 2、公比 2 の等比数列であるため、一般項は、

$$\begin{aligned} c_n &= 2^{n-1} \cdot 2 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} b_2 - b_1 &= 2 \\ b_{n-1} - b_{n-2} &= c_{n-2} \\ &= 2^{n-2} \\ b_n - b_{n-1} &= c_{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

であり、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \ (\because b_1 = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^n - 2 \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ を代入すると、 $b_1 = 2^1 - 2 = 0$ となり、 $n=1$ のときも成り立つ。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、 $b_n = 2^n - 2$ である。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= -4 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (\because a_1 = -4) \\ &= -4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 2) \\ &= -4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2(n-1) \\ &= 2^n - 2n - 4 \end{aligned}$$

となる。また、 $n=1$ を代入すると、 $a_1 = 2^1 - 2 \cdot 1 - 4 = -4$ となり、 $n=1$ のときも成り立つ。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = 2^n - 2n - 4$ である。さらに、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2^k - 2k - 4) \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 4n \\ &= 2^{n+1} - n^2 - 5n - 2 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	－	2	2	2	3
(2)	カ	キ	ク		
	2	①	⑥		
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス
	3	2	3	2	5
(4)	セ	ソ	タ	チ	
	①	④	⑦	⑥	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x+2} \text{ より,} \\ f'(x) &= -\frac{(e^x+2)'}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{-e^x}{(e^x+2)^2} \\ f''(x) &= -\frac{(e^x)' \cdot (e^x+2)^2 - e^x \cdot \{(e^x+2)^2\}'}{(e^x+2)^4} \\ &= -\frac{e^x \cdot (e^x+2)^2 - e^x \cdot 2e^x(e^x+2)}{(e^x+2)^4} \\ &= \frac{e^{2x}-2e^x}{(e^x+2)^3} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} e^x=t \text{ と置換すると, } \frac{dt}{dx} &= t \text{ となるため,} \\ \int f(x)dx &= \int \frac{1}{e^x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{e^x+2} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int \frac{1}{t(t+2)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log|t| - \log|t+2|) + C \\ &= \frac{1}{2} (\log|e^x| - \log|e^x+2|) + C \\ &= \frac{1}{2} \{x - \log(e^x+2)\} + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。よって、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(u) du \\ &= \left[\frac{1}{2} \{u - \log(e^u+2)\} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \{x - \log(e^x+2)\} - \left(-\frac{1}{2} \log 3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \{x - \log(e^x+2) + \log 3\} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} g(\log 6) &= \frac{1}{2} \{ \log 6 - \log(e^{\log 6}+2) + \log 3 \} \\ &= \frac{1}{2} (\log 6 - \log 8 + \log 3) \\ &= \frac{1}{2} (\log 2 + \log 3 - 3 \log 2 + \log 3) \\ &= \log \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \{x - \log(e^x+2) + \log 3\} \\ &= \log \sqrt{\frac{3}{1+2e^{-x}}} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \sqrt{\frac{3}{1+2e^{-x}}} \\ &= \log \sqrt{\frac{3}{1+2 \cdot 0}} \\ &= \log \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= \log \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{3}{1+2e^{-x}}} &= \log \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{1+2e^{-x}}} &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{1+2e^{-x}} &= \frac{25}{9} \\ \Leftrightarrow 27 &= 25(1+2e^{-x}) \\ \Leftrightarrow 2 &= 50e^{-x} \\ \Leftrightarrow e^x &= 25 \\ \therefore x &= 2 \log 5 \end{aligned}$$

である。

(4)

$C: y=f(x) \ (x>0)$ より、 s を正の実数に対し、点 $(s, f(s))$ における C の接線の方程式は、

$$y=f'(s)(x-s)+f(s)$$

である。この直線は点 $(0, Y)$ を通るため、

$$\begin{aligned} Y &= f'(s)(0-s)+f(s) \\ &= f(s)-sf'(s) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= f'(s) - \{f'(s)+sf''(s)\} \\ &= -sf''(s) \end{aligned}$$

である。(1)より、 $f''(s)=\frac{e^s(e^s-2)}{(e^s+2)^3}$ であるため、

$$\begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= 0 \\ \Leftrightarrow -sf''(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s \frac{e^s(e^s-2)}{(e^s+2)^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^s-2 &= 0 \ (\because s>0) \\ \therefore s &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。よって、区間 $s>0$ における Y の増減は下表の通りである。

s	(0)	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$\frac{dY}{ds}$		$+$	0	$-$
Y	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}(2+\log 2)$	$\searrow$

上表より、 Y の値が最大となるのは、 $s=\log 2$ のときである。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	4	3	⑩	④	⑧	①
	キ	ク	ケ	コ	サ	
	⑤	①	⑧	3	③	
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ	
	1	0	2	1	5	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x \cos^3 x \quad (0 \leq x \leq \pi) \text{ より, } 0 < x < \pi \text{ において,} \\
 f'(x) &= \cos x \cdot \cos^3 x + \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \\
 &= \cos^4 x - 3 \cos^2 x \sin^2 x \\
 &= \cos^4 x - 3 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \\
 &= 4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x
 \end{aligned}$$

である。よって、 $0 < x < \pi$ において、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x &= 0 \\
 \Leftrightarrow (4 \cos^2 x - 3) \cos^2 x &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x &= 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore x &= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)
 \end{aligned}$$

であるため、区間 $0 \leq x \leq \pi$ における関数 $f(x)$ の増減は下表の通りである。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

上表より、 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ は $f(x)$ の極大値であり、最大値でもある。また、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は $f(x)$ の極値ではない。また、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 16 \cos^3 x \cdot (-\sin x) - 6 \cos x \cdot (-\sin x) \\
 &= 2(3 \cos x - 8 \cos^3 x) \sin x \\
 &= 2(3 - 8 \cos^2 x) \cos x \sin x
 \end{aligned}$$

であるため、 $0 < x < \pi$ において、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2(3 - 8 \cos^2 x) \cos x \sin x &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{8}, \cos x &= 0 \quad (\because \sin x > 0) \\
 \therefore \cos x &= \pm \sqrt{\frac{3}{8}}, x = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < \pi$ において $\cos x = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$ に対応する x はそれぞれ1つ存在する。よって、

$0 < x < \pi$ において $f''(x) = 0$ となる x の値の個数は3である。ここで、 $0 < x < \pi$ において、 $f''(x) = 0$ となる x の値のうち、最も大きいものを a 、2番目に大きいものを b とすると、

$$\begin{cases} \cos a = -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ b = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

を満たす。

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{\frac{3}{8}} &> -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore \cos a &> \cos \frac{5}{6}\pi
 \end{aligned}$$

であることと $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ より

$$\frac{\pi}{2} < a < \frac{5}{6}\pi$$

となる。よって、前表より、 $f(x)$ は区間 $b < x < a$ においてつねに減少する。また、区間 $b < x < a$ においてつねに $f''(x) < 0$ であるため、 C は上に凸である。以上より、区間 $b < x < a$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は上に凸である。

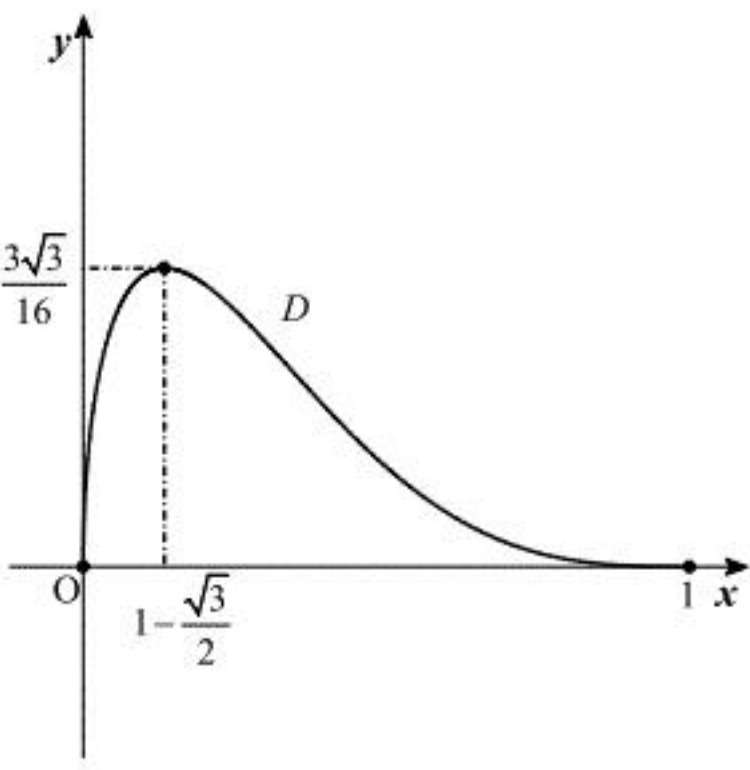
(2)

$$\begin{aligned}
 x &= 1 - \cos t, y = \sin t \cos^3 t = f(t) \text{ より,} \\
 \frac{dx}{dt} &= \sin t \\
 \frac{dy}{dt} &= f'(t) \\
 &= 4 \cos^4 t - 3 \cos^2 t
 \end{aligned}$$

となる。よって、区間 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における (x, y) は下表の通りである。

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+		+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$	$\searrow$	(1, 0)

上表より、曲線 D は下図のようになる。



上図より、 x 軸と D で囲まれた部分の面積 S は、

$$S = \int_0^1 y dx$$

と表される。ここで $x = 1 - \cos t$ と置換することを考えると、 $\frac{dx}{dt} = \sin t$ であり、変数変換は以下の表に対応する。

x	0	$\rightarrow$	1
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 y dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^3 t \cdot \sin t dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t - \sin^4 t \cos t) dt \\
 &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{5} \sin^5 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
 &= \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

となる。