

【I】

(1)

$f(x) = x^2 - 2ax - \frac{1}{2}|a| + 3$ に $x = -2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 2a \cdot (-2) - \frac{1}{2}|a| + 3 \\ &= 4a - \frac{1}{2}|a| + 7 \end{aligned}$$

となる。 x についての方程式 $f(x) = 0$ が -2 を解にもつとき、 $f(-2) = 0$ が成り立つため、

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a - \frac{1}{2}|a| + 7 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} 4a - \frac{1}{2}|a| + 7 &= 4a - \frac{1}{2}a + 7 \\ &= \frac{7}{2}a + 7 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるため、0 以上の実数 a は $4a - \frac{1}{2}|a| + 7 = 0$ を満たさない。また、 $a < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} 4a - \frac{1}{2}|a| + 7 &= 4a + \frac{1}{2}a + 7 \\ &= \frac{9}{2}a + 7 \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} 4a - \frac{1}{2}|a| + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}a + 7 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{14}{9} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、求める値は $a = -\frac{14}{9}$ である。

(答) $a = -\frac{14}{9}$

(2)

x についての 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}|a| + 3 \right) \\ &= a^2 + \frac{1}{2}|a| - 3 \\ &= (|a| + 2) \left(|a| - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。 x についての 2 次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもたないとき、 $D < 0$ であるため、求める値の範囲は、

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (|a| + 2) \left(|a| - \frac{3}{2} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow |a| - \frac{3}{2} &< 0 \quad (\because |a| + 2 > 0) \\ \therefore -\frac{3}{2} &< a < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2}$

〔Ⅱ〕

(1)

9枚の硬貨を同時に投げたとき、裏に書かれた数字が k ($k=2, 3, 4$)である硬貨のうち、裏が出た枚数を a_k とする。9枚の硬貨を同時に投げて $M=9$ となるとき、 $(a_2, a_3, a_4)=(0, 2, 0)$ である。このとき、 $a_2=0$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

であり、 $a_3=2$ となる確率は、

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5}{16}$$

であり、 $a_4=0$ となる確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{256}$$

となる。

(答) $\frac{5}{256}$

(2)

9枚の硬貨を同時に投げて $M=36$ となるとき、 $(a_2, a_3, a_4)=(2, 2, 0), (0, 2, 1)$ である。(1)より、 $a_2=0$ となる確率は $\frac{1}{8}$ 、 $a_3=2$ となる確率は $\frac{5}{16}$ 、 $a_4=0$ となる確率は $\frac{1}{2}$ である。また、 $a_2=2$ となる確率は、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$

であり、 $a_4=1$ となる確率は $\frac{1}{2}$ である。したがって、 $(a_2, a_3, a_4)=(2, 2, 0)$ となる確率は、

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{256}$$

であり、 $(a_2, a_3, a_4)=(0, 2, 1)$ となる確率は、

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{256}$$

であるため、求める確率は、

$$\frac{15}{256} + \frac{5}{256} = \frac{5}{64}$$

となる。

(答) $\frac{5}{64}$

(3)

9枚の硬貨を同時に投げて M が72の倍数となるとき、 $72=2^3 \cdot 3^2$ より、

$$(a_2, a_4)=(3, 0) \text{ または } a_2 \geq 1, a_4=1$$

かつ、 $a_3 \geq 2$ である。ここで、 $a_2=3$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

であり、 $a_4=0$ となる確率は $\frac{1}{2}$ であるため、 $(a_2, a_4)=(3, 0)$ となる確率は、

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

である。また、 $a_2 \geq 1$ の余事象の確率、すなわち $a_2=0$ となる確率は $\frac{1}{8}$ であるため、 $a_2 \geq 1$ となる確率は、

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

である。さらに、 $a_4=1$ となる確率は $\frac{1}{2}$ であるため、 $a_2 \geq 1, a_4=1$ となる確率は、

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

である。ここで、 $a_3 \geq 2$ の余事象の確率、すなわち $a_3=0, 1$ となる確率を求める。 $a_3=0$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

であり、 $a_3=1$ となる確率は、

$${}_5C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32}$$

であるため、 $a_3=0, 1$ となる確率は、

$$\frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

となる。よって、 $a_3 \geq 2$ となる確率は、

$$1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

である。以上より、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{7}{16}\right) \cdot \frac{13}{16} = \frac{13}{32}$$

となる。

(答) $\frac{13}{32}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} s \\ s-3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ s-3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s+2 \\ -s+3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ s-3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s+7 \\ -s+6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} s \\ s-3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s+2 \\ -s+3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= s \cdot (-s+2) + (s-3) \cdot (-s+3) + 1 \cdot 3 \\ &= -2s^2 + 8s - 6 \\ &= -2(s-1)(s-3) \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} s \\ s-3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s+7 \\ -s+6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= s \cdot (-s+7) + (s-3) \cdot (-s+6) + 1 \cdot 4 \\ &= -2s^2 + 16s - 14 \\ &= -2(s-1)(s-7) \end{aligned}$$

である。ここで、 $OA \perp AB$ かつ $OA \perp AC$ が成り立つため、求める値は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} OA \perp AB \\ OA \perp AC \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (\because \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2(s-1)(s-3) = 0 \\ -2(s-1)(s-7) = 0 \end{cases} \\ &\therefore s = 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $s = 1$

(2)

(1)より、

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となるため、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 14 \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &= 6^2 + 5^2 + 4^2 \\ &= 77 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 77 - 28^2} \\ &= \frac{7\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

であり、 $OA \perp AB$ かつ $OA \perp AC$ が成り立つため、四面体OABCの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{7\sqrt{6}}{2} = 7$$

となる。

(答) 7

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 &= 2^2 + 0^2 + 4^2 \\ &= 20 \\ |\overrightarrow{OC}|^2 &= 7^2 + 3^2 + 5^2 \\ &= 83 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ &= 34 \end{aligned}$$

であるため、 $\triangle OBC$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{20 \cdot 83 - 34^2} \\ &= 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

となる。よって、3点O, B, Cが定める平面と点Aの距離を d とすると、四面体OABCの体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{14} \cdot d = \sqrt{14}d$$

と表される。したがって、(2)より、求める値は、

$$\begin{aligned} \sqrt{14}d &= 7 \\ \therefore d &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{14}}{2}$