

〔 1 〕

〔解答〕

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| (1) | ア | イ |   |
|     | 2 | 5 |   |
| (2) | ウ | エ | オ |
|     | 4 | 3 | 5 |

〔解説〕

(1)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

より,

$$a^3 = a^2 \cdot a$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2+\sqrt{5}$$

となる。

(2)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

より,

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

が成立する。よって,

$$2a^5 + a^4 - 5a^3 - 2a^2 + 5a - 8 = 2a^3(a^2 - a - 1) + 3a^4 - 3a^3 - 2a^2 + 5a - 8$$

$$= 2a^3(a^2 - a - 1) + 3a^2(a^2 - a - 1) + a^2 + 5a - 8$$

$$= 2a^3(a^2 - a - 1) + 3a^2(a^2 - a - 1) + (a^2 - a - 1) + 6a - 7$$

$$= 6a - 7 \quad (\because a^2 - a - 1 = 0)$$

$$= -4 + 3\sqrt{5}$$

と計算できる。

## 〔2〕

〔解答〕

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| (1) | ア | イ |   |
|     | 1 | 6 |   |
| (2) | ウ | エ | オ |
|     | 1 | 7 | 6 |

〔解説〕

(1)

すべてのカードの取り出し方は同様に確からしく、すべての取り出し方は  $(20 \cdot 19 \cdot 18)$  通りである。また、題意のようになる取り出し方は、20枚のうちから3枚を選ぶ組み合わせであるから、 $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}$  通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} \div (20 \cdot 19 \cdot 18) = \frac{1}{6}$$

である。

(2)

$a_1 < a_2 < a_3$  かつ  $1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 20$  より、 $2 \leq a_2 \leq 19$  である。ここで、 $a_2 = k$  ( $k = 2, 3, \dots, 19$ ) とすると、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + a_3}{2} \\ \Leftrightarrow 2k &= a_1 + a_3 \end{aligned}$$

が成立する。また、 $a_1 < a_2 < a_3$  より、 $a_1 \leq k-1$ 、 $k+1 \leq a_3$  となる。以下、 $k$  の値によって場合分けをして考える。

[1]  $2 \leq k \leq 10$  のとき

$(a_1, a_3)$  の組のとり方は、

$$(a_1, a_3) = (1, 2k-1), (2, 2k-2), (3, 2k-3), \dots, (k-1, k+1)$$

より、 $(k-1)$  通りである。

[2]  $11 \leq k \leq 19$  のとき

$(a_1, a_3)$  の組のとり方は、

$$(a_1, a_3) = (k-1, k+1), (k-2, k+2), (k-3, k+3), \dots, (20-k, 20)$$

より、 $(20-k)$  通りである。

以上[1], [2]より、カードの取り出し方は、

$$\sum_{k=2}^{10} (k-1) + \sum_{k=11}^{19} (20-k) = 90 \text{ (通り)}$$

となる。よって、求める確率は、

$$\frac{90}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{76}$$

である。

### 〔3〕

〔解答〕

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ |   |   |
|     | 9 | 2 |   |   |
| (2) | ウ | エ | オ | カ |
|     | 3 | 7 | 1 | 6 |

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 |2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 4|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\
 &= 25 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \quad (\because |\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3)
 \end{aligned}$$

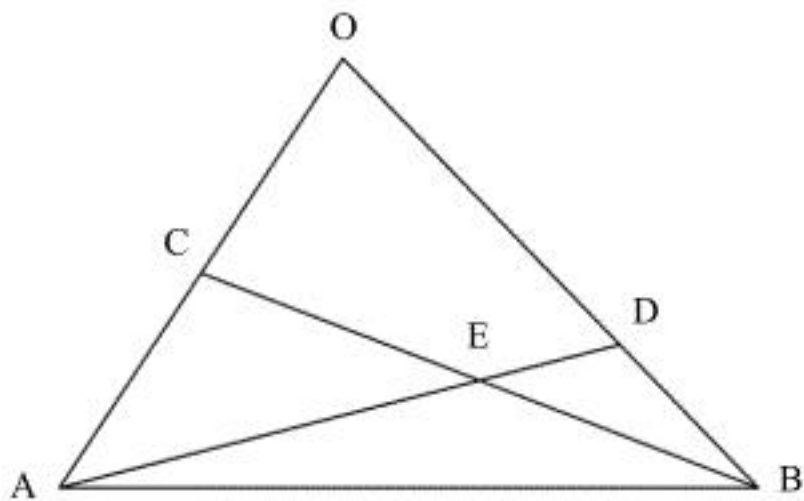
であるから、 $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = \sqrt{7}$  より、

$$\begin{aligned}
 |2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 &= 7 \\
 \Leftrightarrow 25 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 7 \\
 \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$\triangle OBC$  を図示すると下図のようになる。



$\triangle OBC$  について、メネラウスの定理より、

$$\begin{aligned}
 \frac{BD}{DO} \cdot \frac{OA}{AC} \cdot \frac{CE}{EB} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{CE}{EB} &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{CE}{EB} &= 1 \\
 \therefore CE : EB &= 1 : 1
 \end{aligned}$$

が成立するため、

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \triangle OAB = \frac{1}{4} \triangle OAB$$

となる。ここで、 $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3$  と(1)の結果より、

$$\begin{aligned}
 \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 9 - \frac{81}{4}} \\
 &= \frac{3\sqrt{7}}{4}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\triangle ABE = \frac{1}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16}$$

と求まる。

〔 4 〕

〔解答〕

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ |   |   |
|     | 8 | 3 |   |   |
| (2) | ウ | エ | オ | カ |
|     | 2 | 3 | 2 | 2 |

〔解説〕

(1)

$xy^{-2} = 8$  より,  $x = 16$  のとき,

$$16y^{-2} = 8$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2$$

$$\therefore y = \sqrt{2} \quad (\because y > 0)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} M &= (\log_2 16)^2 (\log_8 \sqrt{2}) \\ &= 4^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$xy^{-2} = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 8y^2 \quad (\because y > 0)$$

より,

$$\begin{aligned} M &= (\log_2 x)^2 (\log_8 y) \\ &= (\log_2 8y^2)^2 \cdot \frac{\log_2 y}{\log_2 8} \\ &= \frac{4}{3} (\log_2 y)^3 + 4 (\log_2 y)^2 + 3 \log_2 y \end{aligned}$$

と変形できる。ここで,  $Y = \log_2 y$  とおくと,  $y \geq \frac{1}{2}$  より  $Y \geq -1$  である。このとき

$$M = \frac{1}{3} (4Y^3 + 12Y^2 + 9Y) \text{ と表せるので,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dY} &= 4Y^2 + 8Y + 3 \\ &= (2Y + 1)(2Y + 3) \end{aligned}$$

である。よって, 増減表は次の通りになる。

|                 |    |            |                |            |
|-----------------|----|------------|----------------|------------|
| $Y$             | -1 | ...        | $-\frac{1}{2}$ | ...        |
| $\frac{dM}{dY}$ |    | -          | 0              | +          |
| $M$             |    | $\searrow$ | 極小             | $\nearrow$ |

したがって, 増減表より,  $Y = -\frac{1}{2}$  のとき  $M$  は最小値をとり, その値は

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} + 3 - \frac{9}{2} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。また, このとき

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 y &= -\frac{1}{2} \\ \therefore y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。

【5】

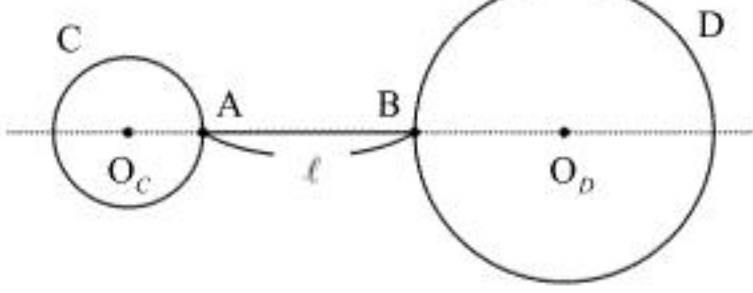
【解答】

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ |   |   |
|     | 3 | 4 | 3 |   |   |
| (2) | エ | オ | カ |   |   |
|     | 1 | 5 | 8 |   |   |
| (3) | キ | ク | ケ | コ | サ |
|     | 1 | 5 | 4 | 1 | 4 |

【解説】

- (1) 円  $x^2+y^2-1=0$  を円 C, 円  $x^2-10x+y^2-6y+30=0$  を円 D とすると, 円 C は点  $O_c(0,0)$  を中心とする半径 1 の円である. また,
- $$x^2-10x+y^2-6y+30=0$$
- $$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=4$$

より, 円 D は点  $O_d(5,3)$  を中心とする半径 2 の円である.



ここで, 円 C と円 D は互いに外部にあるため,  $\ell$  が最小値をとるのは, 上図のように直線  $O_cO_d$  と円 C との交点のうち円 D に近いほうの点と点 A が重なり, かつ直線  $O_cO_d$  と円 D との交点のうち円 C に近いほうの点と点 B が重なるときである. よって, このとき,

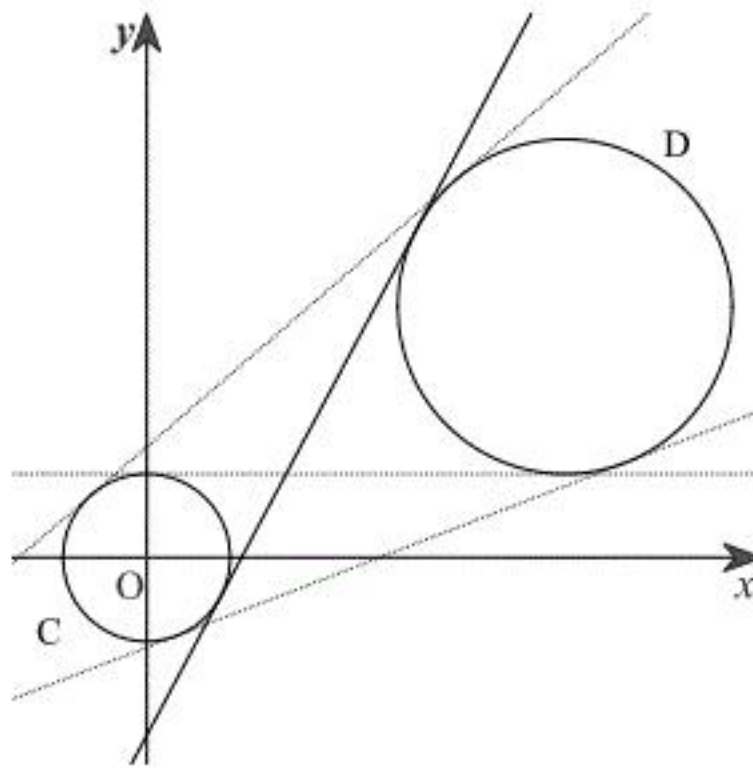
$$O_cO_d=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$$

$$O_cA=1$$

$$O_dB=2$$

より,  $\ell$  の最小値は  $\sqrt{34}-3$  である.

- (2)



$m$  が最大値を取るのは, 円 C と円 D の共通接線のうち傾きが最も大きい接線と直線 AB が重なるときである. ここで図より, 傾きが最も大きい共通接線は, 円 C との接点の  $x$  座標が最も大きい接線である. 以下, 2 円の共通接線を考える. 円 C の点  $(x_1, y_1)$  における接線の方程式は,  $x_1x+y_1y=1$  と表せる. これが円 D とも接するとき,

$$\frac{|5x_1+3y_1-1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=2$$

が成立する. ここで, 点  $(x_1, y_1)$  は円 C:  $x^2+y^2-1=0$  上にあるから,  $x_1^2+y_1^2=1$  であるので,

$$|5x_1+3y_1-1|=2$$

$$\Leftrightarrow 5x_1+3y_1-1=\pm 2$$

$$\Leftrightarrow y_1=\frac{-5x_1+3}{3}, \frac{-5x_1-1}{3}$$

と求まる.

- [1]  $y_1=\frac{-5x_1+3}{3}$  のとき

$$x_1^2+y_1^2=1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+\left(\frac{3-5x_1}{3}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 34x_1^2-30x_1+9=9$$

$$\therefore x_1=0, \frac{15}{17}$$

である.

- [2]  $y_1=-\frac{5}{3}x_1-\frac{1}{3}$  のとき

$$x_1^2+y_1^2=1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+\left(\frac{-5x_1-1}{3}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 34x_1^2+10x_1+1=9$$

$$\therefore x_1=-\frac{5\pm 3\sqrt{33}}{34}$$

である.

以上[1], [2]より, 2 円の共通接線のうち傾きが最も大きい接線は,  $x_1=\frac{15}{17}$  のとき, すなわち,

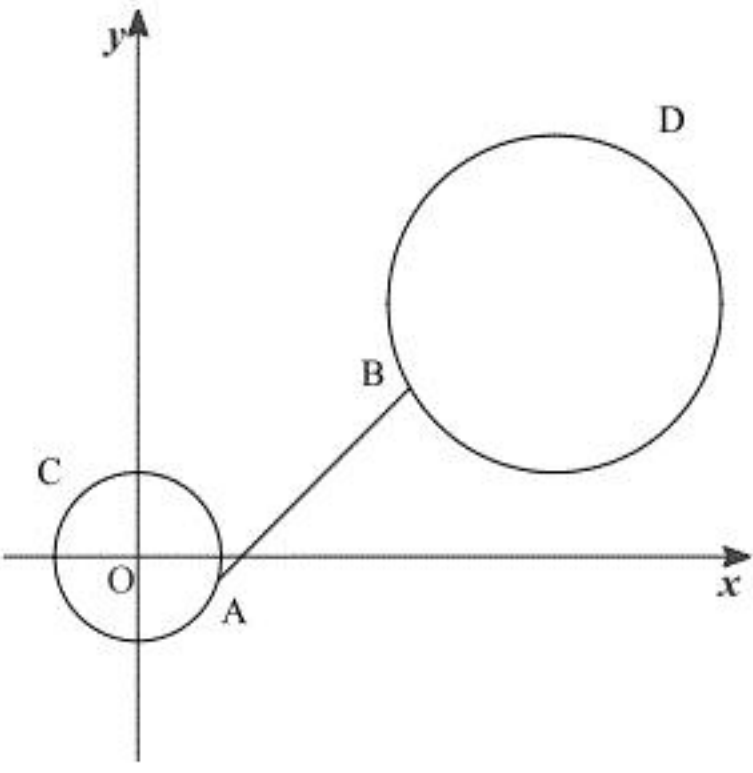
$(x_1, y_1)=\left(\frac{15}{17}, -\frac{8}{17}\right)$  のときである. このとき, 接線の方程式は,

$$\frac{15}{17}x-\frac{8}{17}y-1=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{15}{8}x-\frac{17}{8}$$

であるので,  $m$  の最大値は  $\frac{15}{8}$  である.

- (3)



直線 AB の方程式を  $y=x+k$  とおく. 点 A の  $x$  座標を  $x_1$  とおくと,  $\ell=5\sqrt{2}$ ,  $m=1$  より,  $A(x_1, x_1+k)$ ,  $B(x_1+5, x_1+5+k)$  となる. 点 A は円  $x^2+y^2-1=0$  上, 点 B は円

$(x-5)^2+(y-3)^2=4$  上にあるから,

$$\begin{cases} x_1^2+(x_1+k)^2=1 \\ (x_1+5-5)^2+(x_1+5+k-3)^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+(x_1+k)^2=1 & \cdots \textcircled{1} \\ x_1^2+(x_1+k+2)^2=4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ. よって,  $\textcircled{2}-\textcircled{1}$ より

$$(x_1+k+2)^2-(x_1+k)^2=3$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1+k)+4=3$$

$$\Leftrightarrow x_1+k=-\frac{1}{4}$$

であるから, これを $\textcircled{1}$ に代入して

$$x_1^2=\frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

と求まる.

# 〔6〕

〔解答〕

|     |   |   |   |   |   |  |
|-----|---|---|---|---|---|--|
| (1) | ア | イ |   |   |   |  |
|     | 4 | 3 |   |   |   |  |
| (2) | ウ | エ | オ | カ | キ |  |
|     | 8 | 9 | 9 | 1 | 6 |  |

〔解説〕

(1)

$a \neq 0$ であるから、 $\ell$ の方程式は  $y = -\frac{4}{a}x + 4$  である。これを  $C$  の方程式と連立させると、

$$\begin{aligned} -x(x-k) &= \left(-\frac{4}{a}x + 4\right) \\ \Leftrightarrow x^2 - \left(k + \frac{4}{a}\right)x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $\ell$ と $C$ が接しているとき、 $x^2 - \left(k + \frac{4}{a}\right)x + 4 = 0$ の判別式を  $D$  とおくと

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k + \frac{4}{a}\right)^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $k > 0, a > 0$ より  $k + \frac{4}{a} > 0$  だから

$$\begin{aligned} k + \frac{4}{a} &= 4 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{4}{a} + 4 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{4}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{a} + 4 + \frac{4}{a}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり、 $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} q &= -\frac{4}{a}p + 4 \\ &= -\frac{4}{3} \cdot 2 + 4 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

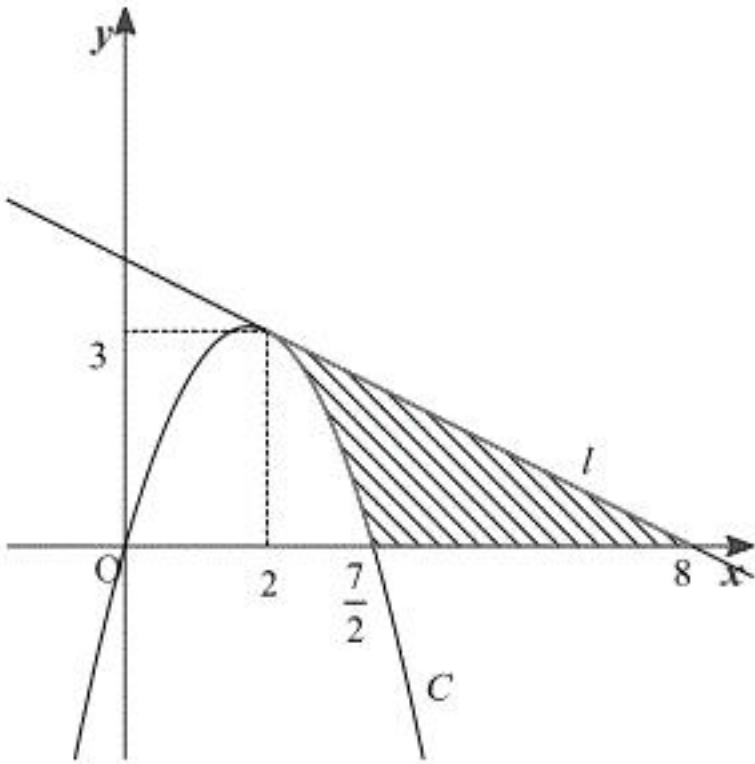
と求まる。

(2)

(1)より、 $a$ の値に関わらず  $p = 2$  であるから、 $q = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} q &= 3 \\ \Leftrightarrow -\frac{4}{a}p + 4 &= 3 \\ \Leftrightarrow -\frac{8}{a} + 4 &= 3 \\ \therefore a &= 8 \end{aligned}$$

となる。よって、 $C$ の  $x \geq 2$ の部分と  $\ell$ と  $x$ 軸とで囲まれた図形は次図の斜線部分である。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - \int_2^{\frac{7}{2}} (-x) \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right) dx &= 9 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^2\right]_2^{\frac{7}{2}} \\ &= 9 + \frac{1}{3} \cdot \frac{279}{8} - \frac{7}{4} \cdot \frac{33}{4} \\ &= \frac{99}{16} \end{aligned}$$

である。