

【I】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ									
	3	2	8									
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
	5	4	8	1	1	2	1	8	3	1	6	
(3)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ				
	1	7	1	6	8	5	1	7				

〔解説〕

(1)

袋 A から玉を同時に 2 個取り出すときの取り出し方は全部で

$${}_8C_2=28 \text{ (通り)}$$

あり、これらは同様に確からしい。取り出した玉に書かれた 2 つの数の和が 10 となる取り出

し方は $\{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$ の 3 通りあるから、求める確率は $\frac{3}{28}$ となる。

(2)

袋 A、袋 B から玉を 1 個ずつ取り出すときの取り出し方は全部で

$$8 \cdot 6 = 48 \text{ (通り)}$$

あり、これらは同様に確からしい。袋 A から取り出した玉に書かれた数を a 、袋 B から取り出した玉に書かれた数を b とすると、 $a + b = 10$ となる取り出し方は

$(a, b) = (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$ の 5 通りあるから、その確率は

$$\frac{5}{48}$$

となる。次に、 $a = b$ となる取り出し方は $(a, b) = (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)$ の 4 通りあるから、その確率は

$$\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

となる。また、 $a > b$ となる取り出し方は $(a, b) = (6, 5), (7, 5), (7, 6), (8, 5), (8, 6), (8, 7)$ の 6 通りあるから、その確率は

$$\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

となる。さらに、 a, b の最大値が 7 であるという事象は、 a, b がどちらも 7 以下であるとい

事象から、 a, b がどちらも 6 以下であるという事象を除いたものであり、 a, b がどちらも 7

以下である確率は

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{16}, \quad 6 \text{ 以下である確率は } \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{4}$$

であるから、 a, b の最大値が 7 で

$$\frac{7}{16} - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

ある確率は

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

となる。

(3)

袋 A から同時に 2 個の玉を取り出し、袋 B から 1 個の玉取り出すときの取り出し方は全部で

$${}_8C_2 \cdot 6 = 168 \text{ (通り)}$$

あり、これらは同様に確からしい。袋 A から取り出した玉に書かれた 2 つの数を a_1, a_2 とし、 $a_1 + a_2 = b$ となる取り出し方を b の値で場合分けして考える。

[1] $b = 5$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 4\}, \{2, 3\}$ の 2 通りある。

[2] $b = 6$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 5\}, \{2, 4\}$ の 2 通りある。

[3] $b = 7$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ の 3 通りある。

[4] $b = 8$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$ の 3 通りある。

[5] $b = 9$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ の 4 通りある。

[6] $b = 10$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$ の 3 通りある。

以上、[1]~[6]より $a_1 + a_2 = b$ となる取り出し方は 17 通りあり、その確率は $\frac{17}{168}$ となる。次に、

$a_1 + a_2 = b$ となり a_1, a_2, b の中に 8 が含まれる取り出し方を b の値で場合分けして考える。

[1] $b = 5, 6, 7$ のとき

$a_1 + a_2 = b$ となり a_1, a_2, b の中に 8 が含まれる取り出し方は存在しない。

[2] $b = 8$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$ の 3 通りある。

[3] $b = 9$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{1, 8\}$ の 1 通りある。

[4] $b = 10$ のとき

袋 A からの玉の取り出し方は $\{a_1, a_2\} = \{2, 8\}$ の 1 通りある。

以上、[1]~[4]より $a_1 + a_2 = b$ となり a_1, a_2, b の中に 8 が含まれる取り出し方は 5 通りあり、その

確率は $\frac{5}{168}$ となる。よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{5}{168}}{\frac{17}{168}} = \frac{5}{17}$$

$$\frac{5}{17}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	3	1	4	5	2	2	1	0	3	5	1	0
セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ			
9	2	5	5	1	0	9	5	1	1			

〔解説〕

円 C の方程式は

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \quad \cdots \text{①}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$$

と変形できるから、 P の座標は $P(1, 3)$ である。第1象限にあり、 O からの距離が $2\sqrt{2}$ である

C 上の点 A の座標を $(x, y) (x > 0, y > 0)$ とすると、 (x, y) は①を満たし、また

$$x^2 + y^2 = 8 \quad \cdots \text{②}$$

が成り立つ。①－②より

$$2x + 6y = 8$$
$$\Leftrightarrow x = -3y + 4 \quad \cdots \text{③}$$

を得る。ここで $x > 0$ より $0 < y < \frac{4}{3}$ である。③を②に代入して

$$\begin{aligned} (-3y+4)^2 + y^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 10y^2 - 24y + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5y-2)(y-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{2}{5} \left(\because 0 < y < \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

となり、③より A の座標は $A\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ となる。次に、円 D の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 5 \end{aligned}$$

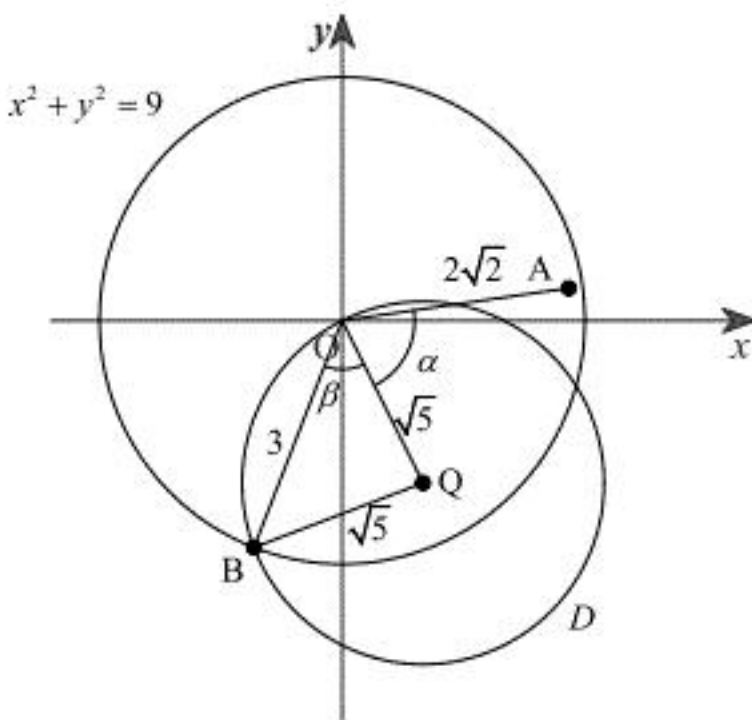
と変形できるから、 Q の座標は $Q(1, -2)$ である。よって、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{14}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot (-2) = 2$$

となり、 $OA = 2\sqrt{2}$, $OQ = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ より

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OQ}|} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

である。第3象限にあり、 O からの距離が3である D 上の点 B の位置関係は下図のようになる。



三角形 OBQ において余弦定理より

$$\cos \beta = \frac{3^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

となり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \beta \\ &= 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{10} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。上図より $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ だから $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ であり、

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10} \end{aligned}$$

となる。ここで加法定理より

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{55}}{10} \\ &= \frac{3\sqrt{2}(1 - \sqrt{11})}{20} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos(\alpha + \beta) \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}(1 - \sqrt{11})}{20} \\ &= \frac{9}{5}(1 - \sqrt{11}) \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	0	1	1	0	⑤	⑩	1	0	3	1	0	3
セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト						
1	3	3	3	0	1	4						

【解説】

2を3で割った余りは2だから、 $a_1=1_{(3)}$ の右側に0を付け加えて

$$a_2=10_{(3)}$$

となる。3を3で割った余りは0だから、 $a_2=10_{(3)}$ の右側に1を付け加えて

$$a_3=101_{(3)}$$

となる。4を3で割った余りは1だから、 $a_3=101_{(3)}$ の右側に1を付け加えて

$$a_4=1011_{(3)}$$

となる。同様にして、

$$a_5=10110_{(3)}$$

$$a_6=101101_{(3)}$$

となる。 a_3 を10進法で表すと

$$\begin{aligned} a_3 &= 101_{(3)} \\ &= 3^2 \times 1 + 3^0 \times 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

である。次に、 $b_n=a_{3n+3}-a_{3n}$ について、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_6 - a_3 \\ &= 101101_{(3)} - 101_{(3)} \\ &= 101000_{(3)} \\ &= 1 \times 3^5 + 1 \times 3^3 \\ &= (3^2 + 1) \times 3^3 \\ &= 10 \times 3^3 \end{aligned}$$

より $c_1=10, d_1=3$ となる。ここで、すべての自然数 n について

$$a_{3n}=101101\cdots101_{(3)} \quad (101\text{が}n\text{組並ぶ}) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_3=101_{(3)} \text{ より } \textcircled{1} \text{ は成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。

$3k+1, 3k+2, 3k+3$ は3で割ったときの余りがそれぞれ1, 2, 0だから、 a_{3k+3} を3進法で表した数字の列は a_{3k} を3進法で表した数字の列の右側に101を付け加えた列となる。よって、

$$a_{3k+3}=101101\cdots101101_{(3)} \quad (101\text{が}k+1\text{組並ぶ})$$

となり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上、[1], [2]より $a_{3n}=101101\cdots101_{(3)} \quad (101\text{が}n\text{組並ぶ})$ はすべての自然数 n について成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= a_{3n+3} - a_{3n} = 101000\cdots000_{(3)} \quad (101\text{の右側に}0\text{が}3n\text{個並ぶ}) \\ &= 1 \times 3^{3n+2} + 1 \times 3^{3n} \\ &= (3^2 + 1) 3^{3n} \\ &= 10 \times 3^{3n} \end{aligned}$$

となる。これを用いると、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3n} &= a_3 + b_1 + \cdots + b_{n-1} \\ &= 10 + \sum_{i=1}^{n-1} 10 \times 3^{3^i} \\ &= 10 + 10 \times \frac{3^3(3^{3^{n-3}}-1)}{3^3-1} \\ &= \frac{5}{13}(3^{3n}-1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a_{3n} > 3^{40}$ を満たす2以上の自然数 n のうちで最小のものを求めるために、2以上の整数 N が

$$\frac{5}{13} \times 3^{3N} > 3^{40} \qquad \cdots \textcircled{\text{i}}$$

を満たすならば、 $a_{3N} = \frac{5}{13}(3^{3N}-1) > 3^{40}$ が成り立つことを、背理法を用いて示す。 N が $\textcircled{\text{i}}$ を満たすとする。 $a_{3N} > 3^{40}$ が成り立たないと仮定すると、

$$3^{40} \geq \frac{5}{13}(3^{3N}-1) \qquad \cdots \textcircled{\text{ii}}$$

となる。 $\textcircled{\text{i}}$ および $\textcircled{\text{ii}}$ より

$$\begin{aligned} \frac{5}{13} \times 3^{3N} > 3^{40} &\geq \frac{5}{13}(3^{3N}-1) \\ \Leftrightarrow 5 \times 3^{3N} > 13 \times 3^{40} &\geq 5(3^{3N}-1) \end{aligned}$$

となる。 13×3^{40} は3の倍数であり、 $5(3^{3N}-1)$ 以上 5×3^{3N} 未満の3の倍数は $5 \times 3^{3N}-3$ のみだから、

$$13 \times 3^{40} = 5 \times 3^{3N} - 3 \qquad \cdots \textcircled{\text{iii}}$$

となる。 $\textcircled{\text{iii}}$ の右辺は 3^{40} で割り切れないから矛盾である。したがって、 N が $\textcircled{\text{i}}$ を満たすな

らば、 $a_{3N} > 3^{40}$ が成り立つ。一方、 $\textcircled{\text{i}}$ を満たす2以上の整数 N のうちで最小のものを A と

すると、まず A は $\textcircled{\text{i}}$ を満たすから、 $a_{3A} > 3^{40}$ が成り立ち、さらに

$$\frac{5}{13}(3^{3A}) > 3^{40} \geq \frac{5}{13}\{3^{3(A-1)}\}$$

であるから、

$$3^{40} \geq \frac{5}{13}\{3^{3(A-1)}\} > \frac{5}{13}\{3^{3(A-1)}-1\} = a_{3(A-1)}$$

を満たす。つまり、 A は

$$a_{3A} > 3^{40} > a_{3(A-1)}$$

を満たし、 $a_{3n} > 3^{40}$ を満たす2以上の自然数 n のうちで最も小さいものである。ここで、整数 m に対し $m \leq \log_3 \frac{13}{5} < m+1$ が成り立つとすると、 $1 < \frac{13}{5} < 3 \Leftrightarrow 0 < \log_3 \frac{13}{5} < 1$ より $m=0$ であ

る。 $\textcircled{\text{i}}$ を満たす2以上の整数 N のうちで最小のもの A について、

$$\begin{aligned} \frac{5}{13}(3^{3A}) > 3^{40} &\geq \frac{5}{13}\{3^{3(A-1)}\} \\ \Leftrightarrow \log_3 \frac{5}{13} + 3A > 40 &\geq \log_3 \frac{5}{13} + 3(A-1) \\ \Leftrightarrow A > \frac{1}{3} \left(40 + \log_3 \frac{13}{5} \right) &\geq A-1 \end{aligned}$$

となり、 $0 < \log_3 \frac{13}{5} < 1$ より $13 < \frac{1}{3} \left(40 + \log_3 \frac{13}{5} \right) < 14$ であるから

$$A=14$$

となる。したがって、 $a_{3n} > 3^{40}$ を満たす2以上の自然数 n のうちで最も小さいものは14である。

【Ⅳ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
②	④	②	④	②	⑤	⑨	②	⑤	⑦	⑥	⊖	3
セ	ソ	タ										
6	4	3										

【解説】

(1)

$$f'(x)=3x^2-10x-8=(3x+2)(x-4)$$

より $f'(x)=0$ となる x の値は $x=-\frac{2}{3}, 4$ である。 $f(x)$ の増減表は

x	...	$-\frac{2}{3}$	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

となるから、 $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ は $f(x)$ の極大値であるが、 最大値ではなく、 $f(4)$ は $f(x)$ の極小値で

あるが、 最小値ではない。 C の、 点 $(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ &= f'(t)x-(3t^2-10t-8)t+(t^3-5t^2-8t+12) \\ &= f'(t)x-2t^3+5t^2+12 \end{aligned}$$

である。 ℓ が $P(-1, k)$ を通るとき

$$\begin{aligned} k &= -f'(t)-2t^3+5t^2+12 \\ \Leftrightarrow k &= -(3t+2)(t-4)-2t^3+5t^2+12 \end{aligned}$$

$$\therefore k=-2\left(t^3-t^2-5t-10\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 この右辺を $g(t)$ とおくと、

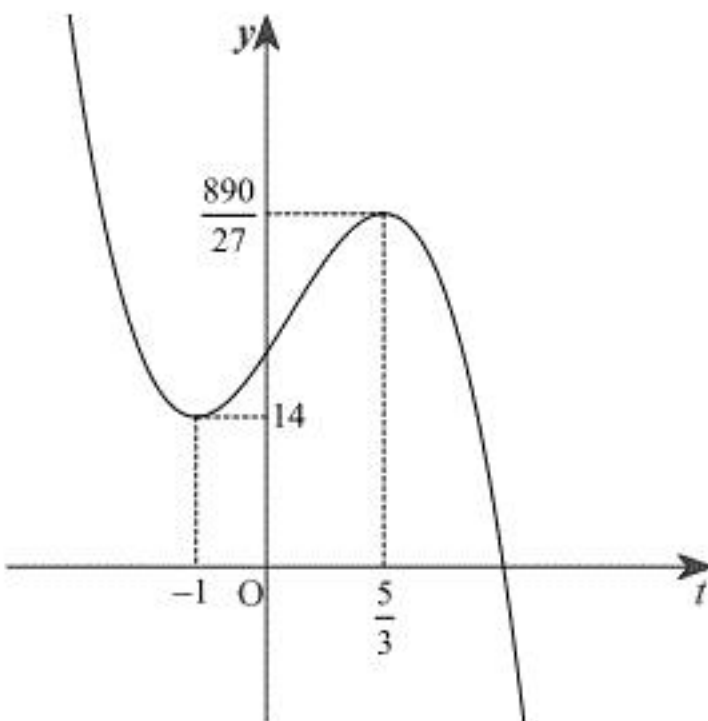
$$g'(t)=-2\left(3t^2-2t-5\right)=-2(t+1)(3t-5)$$

となり、 $g(t)$ の増減表は

t	...	-1	...	$\frac{5}{3}$	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	↘		↗		↘

となるから、 $g(t)$ は $t=\frac{5}{3}$ において極大値をとり、 $t=-1$ において極小値をとる。 また、

$y=g(t)$ のグラフは下図のようになる。



$k=14, \frac{890}{27}$ のとき $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数が2個となり、 $P(-1, k)$ を通

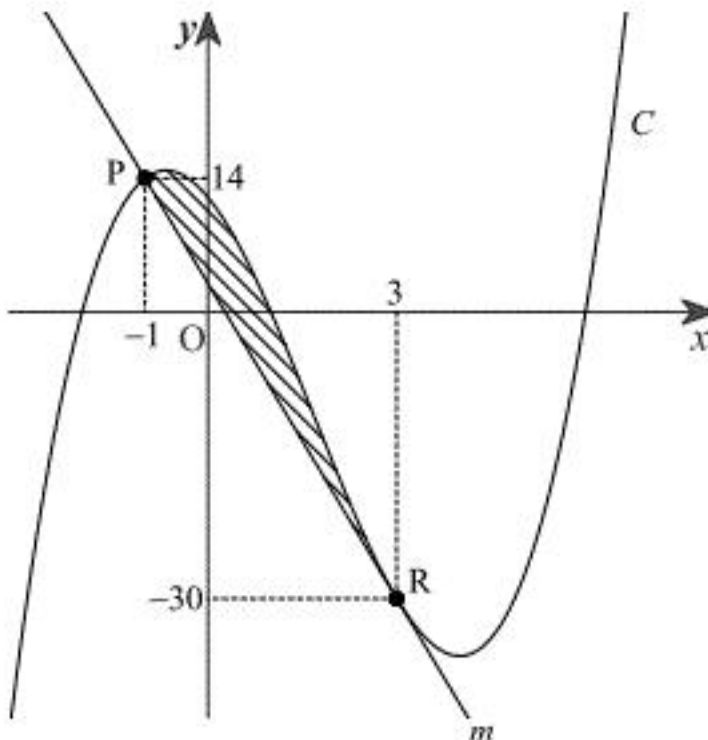
る C の接線の本数はちょうど2本となるから、 $a=14$ となる。 $k=a=14$ のとき、 ①より

$$\begin{aligned} 14 &= -2\left(t^3-t^2-5t-10\right) \\ \Leftrightarrow t^3-t^2-5t-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 3 \end{aligned}$$

となり、 $q < r$ より $q=-1, r=3$ となる。 よって、 m の方程式は $y=-11x+3$ である。 ここで m

は $P(-1, 14)$ を通るが、 $f(-1)=14$ より P は C 上の点である。 よって、 C と m で囲まれた部

分は下図の斜線部分である。



求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \left\{ \left(x^3-5x^2-8x+12 \right) - \left(-11x+3 \right) \right\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (x+1)(x-3)^2 dx \end{aligned}$$

となる。 ここで、 $x-3=s$ とおくと、 $\frac{ds}{dx}=1$ であり、 x, s の対応関係は以下のようになる。

x	-1	→	3
s	-4	→	0

したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^0 (s+4)s^2 ds \\ &= \int_{-4}^0 \left(s^3+4s^2 \right) ds \\ &= \left[\frac{1}{4}s^4+\frac{4}{3}s^3 \right]_{-4}^0 \\ &= \frac{0-(-4)^4}{4} + \frac{4\left\{ 0-(-4)^3 \right\}}{3} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となる。

【V】

【解答】

	ア				
	2				
(1)	イ	ウ	エ	オ	カ
	－	1	4	①	②
(2)	キ	ク	ケ		
	－	2	2		
(3)	コ	サ	シ		
	③	④	⑥		
(4)	ス	セ	ソ	タ	チ
	1	3	4	3	4

【解説】

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{\text{イ}}$$

について、 $x=0$ は $\textcircled{\text{イ}}$ の解ではないから、 $\textcircled{\text{イ}}$ の両辺を $x^2(\neq 0)$ で割ると

$$\begin{aligned}x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}&=0\\ \Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b&=0\end{aligned}$$

である。 $x+\frac{1}{x}=t$ とおくと、 x が $\textcircled{\text{イ}}$ の解であるとき、 t は2次方程式

$$t^2+at+b-2=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{\text{ii}}$$

の解である。

(1)

$a=-3, b=-2$ のとき、 $\textcircled{\text{ii}}$ の解は

$$\begin{aligned}t^2-3t-4&=0\\ \Leftrightarrow(t+1)(t-4)&=0\\ \therefore t&=-1, 4\end{aligned}$$

である。

[1] $x+\frac{1}{x}=-1$ のとき

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}=-1&\Leftrightarrow x^2+x+1=0\ (\because x\neq 0)\text{の判別式は}\\ 1^2-4&=-3<0\end{aligned}$$

となる。よって、 $x+\frac{1}{x}=-1$ を満たす x はちょうど2つあり、どちらも虚数となる。

[2] $x+\frac{1}{x}=4$ のとき

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}=4&\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\ (\because x\neq 0)\text{の判別式は}\\ 4^2-4&=12>0\end{aligned}$$

となる。よって、 $x+\frac{1}{x}=4$ を満たす x はちょうど2つあり、どちらも実数となる。

(2)

X についての2次方程式 $X^2-TX+1=0$ の判別式を D とする。 $X^2-TX+1=0$ が実数解をもつための条件より、 T のとり値の範囲は

$$\begin{aligned}D&\geq 0\\ \Leftrightarrow T^2-4&\geq 0\\ \Leftrightarrow (T+2)(T-2)&\geq 0\\ \therefore T&\leq -2, 2\leq T\end{aligned}$$

である。

(3)

方程式

$$X+\frac{1}{X}=0\Leftrightarrow X^2-TX+1=0\ (X\neq 0)$$

の2つの解を α, β とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=T\\ \alpha\beta=1\end{cases}$$

を得る。

[1] $T>2$ のとき

$$\begin{cases}D=(T+2)(T-2)>0\\ \alpha+\beta=T>0\\ \alpha\beta=1>0\end{cases}$$

が成り立つから $X+\frac{1}{X}=T$ は異なる2つの実数解をもち、かつ解はともに正の数である。

[2] $T<-2$ のとき

$$\begin{cases}D=(T+2)(T-2)>0\\ \alpha+\beta=T<0\\ \alpha\beta=1>0\end{cases}$$

が成り立つから $X+\frac{1}{X}=T$ は異なる2つの実数解をもち、かつ解はともに負の数である。

[3] $-2<T<2$ のとき

$$D=(T+2)(T-2)<0$$

が成り立つから $X+\frac{1}{X}=T$ は異なる2つの虚数解をもつ。

(4)

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x}&=t\\ \Leftrightarrow x^2-tx+1&=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{\text{1}}\end{aligned}$$

とする。ここで、一般に実数係数の方程式がある虚数解をもつとき、その共役複素数も方程式の解となる。したがって、4次方程式 $\textcircled{\text{1}}$ の実部が $\frac{1}{2}$ である2つの虚数解は、それぞれ

$\frac{1}{2}+ui, \frac{1}{2}-ui$ (u は実数)と表される。この下で、4次方程式 $\textcircled{\text{イ}}$ が解をちょうど3つもち、解

のうちの1つが正の実数である条件は、 x についての2次方程式 $\textcircled{\text{1}}$ が正の重解をもつような t

と、 $\textcircled{\text{1}}$ が $x=\frac{1}{2}\pm ui$ を解にもつような t が2次方程式 $\textcircled{\text{ii}}$ の解となることである。まず、 $\textcircled{\text{1}}$ が正

の重解をもつような t の値を求める。 $\textcircled{\text{1}}$ は正の重解をもつから $t>0$ であり、 $\textcircled{\text{1}}$ の判別式を D_1 とすると、

$$\begin{aligned}D_1&=0\\ \Leftrightarrow t^2-4&=0\\ \therefore t&=2\ (\because t>0)\end{aligned}$$

となる。このとき $\textcircled{\text{1}}$ より $(x-1)^2=0$ となるから重解は $x=1$ となり、これが $\textcircled{\text{イ}}$ の実数解であ

る。次に、 $\textcircled{\text{1}}$ が $x=\frac{1}{2}\pm ui$ を解にもつような t の値を求める。解と係数の関係より

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\frac{1}{2}+ui+\frac{1}{2}-ui=t\\ \left(\frac{1}{2}+ui\right)\left(\frac{1}{2}-ui\right)=1\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}1=t\\ \frac{1}{4}+u^2=1\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}t=1\\ u^2=\frac{3}{4}\end{cases}\end{aligned}$$

となる。したがって、2次方程式 $\textcircled{\text{ii}}$ が $t=1, 2$ を解にもつような a, b を求めればよく、 $\textcircled{\text{ii}}$ に

おいて解と係数の関係より

$$\begin{aligned}&\begin{cases}1+2=-a\\ 1\cdot 2=b-2\end{cases}\\ \Leftrightarrow &a=-3, b=4\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
0	4	3	⑧	⑩	1	2	1	2	1	2	2
ス	セ	ソ	タ	チ							
3	1	2	3	3							

〔解説〕

C と ℓ の共有点の x 座標は、 $y=\frac{1}{2}x+1$ を ② に代入して

$$\begin{aligned} x^2 - \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left(x - \frac{4}{3}\right) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $p < q$ より $p = 0, q = \frac{4}{3}$ となる。次に、

$$t = \sqrt{x^2+1} + x \qquad \cdots \text{③}$$

について、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} t &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} t &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0 \end{aligned}$$

であり、 $t > 0$ である。 C と ℓ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2}x+1 - \sqrt{x^2+1}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2}x+1\right) dx - \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{x^2+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 + x\right]_0^{\frac{4}{3}} - I \\ &= \frac{16}{9} - I \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y\left(=\sqrt{x^2+1}\right), \frac{dx}{dt}$ を t で表す。 $x=t-y$ を ② に代入すると

$$\begin{aligned} (t-y)^2 - y^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2ty + 1 &= 0 \\ \therefore y &= \frac{t^2+1}{2t} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。これを $x=t-y$ に代入すると

$$\begin{aligned} x &= t - y \\ &= t - \frac{t^2+1}{2t} \\ &= \frac{t^2-1}{2t} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot t - (t^2-1)}{t^2} = \frac{t^2+1}{2t^2}$$

となる。また、 x, t の対応関係は以下ようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{4}{3}$
t	1	$\rightarrow$	3

よって、 I の値は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{x^2+1} dx \\ &= \int_1^3 \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{t^4+2t^2+1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_1^3 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{t^2}{2} + 2\log t - \frac{1}{2t^2}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} \left\{\frac{9-1}{2} + 2\log 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(4 + 2\log 3 + \frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{40}{9} + 2\log 3\right) \\ &= \frac{10}{9} + \frac{1}{2}\log 3 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$S = \frac{16}{9} - \left(\frac{10}{9} + \frac{1}{2}\log 3\right) = \frac{2}{3} - \log \sqrt{3}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
⑩	①	2	3	⑤	①	①	6	9	③	②	②	①
セ	ソ	タ										
2	3	2										

〔解説〕

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき } 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ だから}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において、

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3 \cos 3\theta$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3 \cos 3\theta}{2 \cos 2\theta}$$

である。 $f'(x) = 0$ となる θ の値は

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos 3\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \left(\because 0 < 3\theta < \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

であり、このとき

$$x = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ において $\cos 2\theta > 0$ より $f'(x)$ と $\cos 3\theta$ の符号は一致するから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって、 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$ は $f(x)$ の最大値である。次に、逆関数の微分法により

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1}{2 \cos 2\theta}$$

が成り立つから、

$$f''(x) = \frac{d\theta}{dx} \cdot \left(\frac{d}{d\theta} \frac{dy}{dx} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \cos 2\theta} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{-3 \sin 3\theta \cos 2\theta - \cos 3\theta \cdot (-2 \sin 2\theta)}{\cos^2 2\theta}$$

$$= \frac{6 \cos 3\theta \sin 2\theta - 9 \sin 3\theta \cos 2\theta}{4 \cos^3 2\theta}$$

と表される。 $g(\theta) = 6 \cos 3\theta \sin 2\theta - 9 \sin 3\theta \cos 2\theta$ について、

$$g'(\theta) = 6(-3 \sin 3\theta \sin 2\theta + 2 \cos 3\theta \cos 2\theta) - 9(3 \cos 3\theta \cos 2\theta - 2 \sin 3\theta \sin 2\theta)$$

$$= -15 \cos 3\theta \cos 2\theta$$

であり、 $g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{4}$
$g'(\theta)$		-	0	+	(0)
$g(\theta)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$-3\sqrt{2}$

よって、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において $g'(\theta)$ は正の値も負の値もとり、 $g(\theta)$ はつねに負の値をとる。一

方、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において $\cos 2\theta > 0$ であるから、 $f''(x) = \frac{g(x)}{4 \cos^3 2\theta}$ はつねに負の値をとる、曲線 C は上に凸である。積和の公式を用いると、

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \cdot 2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(3\theta + 2\theta) + \sin(3\theta - 2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5\theta + \sin \theta) d\theta$$

$$= \left[-\frac{\cos 5\theta}{5} - \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{5} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{2(3 - \sqrt{2})}{5}$$

となる。