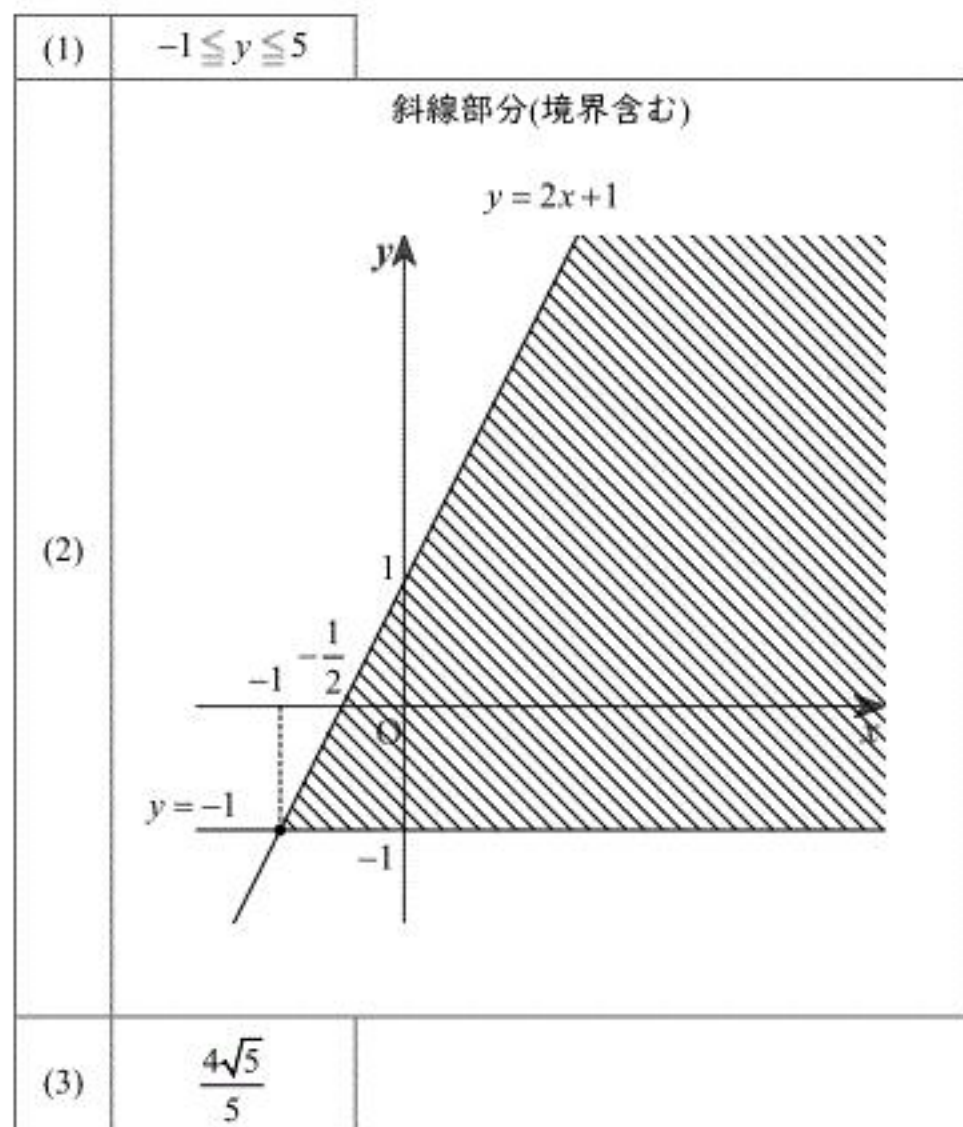


〔Ⅰ〕

〔解答〕



〔解説〕

(1)

$$|x-y| \leq x+1$$

に点 $(2, y)$ が属するような y の値の範囲は,

$$|2-y| \leq 2+1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2-y \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq y \leq 5$$

である。

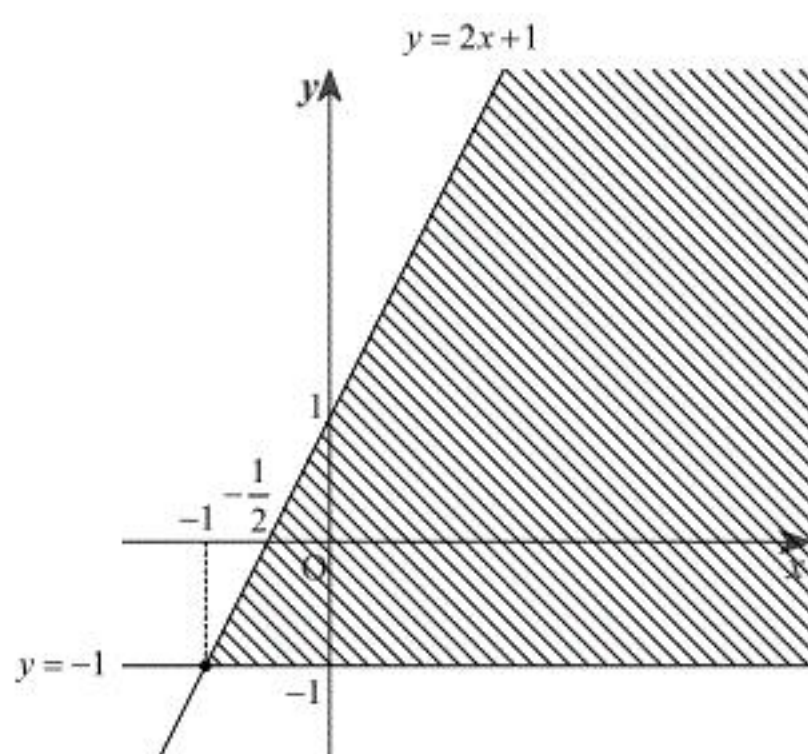
(2)

$$|x-y| \leq x+1$$

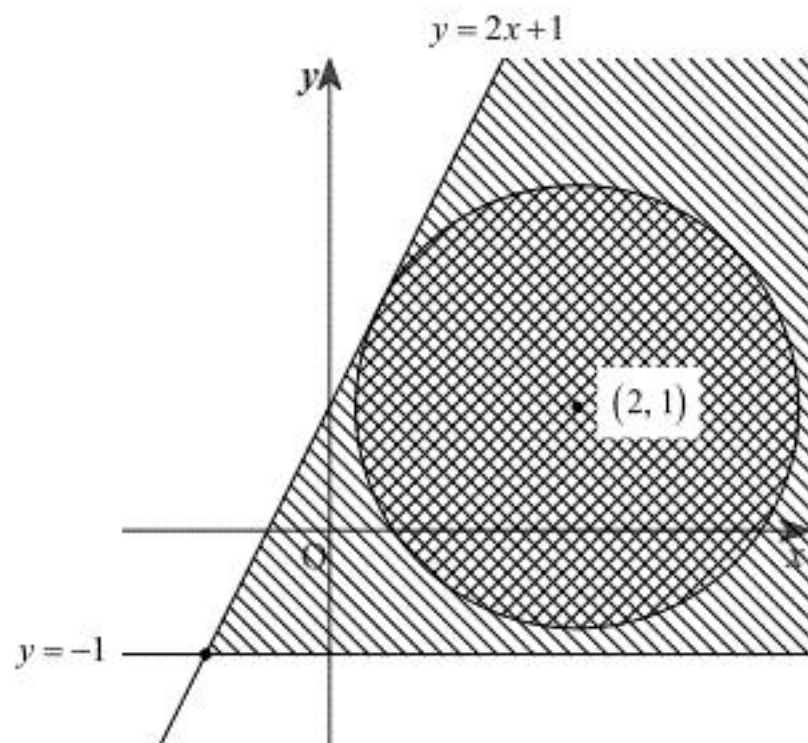
$$\Leftrightarrow -(x+1) \leq x-y \leq x+1$$

$$\therefore -1 \leq y \leq 2x+1$$

となる。よって、領域 D は下図の斜線部である。なお境界を含む。



(3)



$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 - a^2 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq a^2$$

となる。 $a > 0$ より、②式は中心 $(2, 1)$ 、半径 a の円の内側を表す。ここで、点 $(2, 1)$ と直線 $y = -1$ の距離は 2 である。また、点 $(2, 1)$ と直線 $y = 2x + 1$ 、すなわち $2x - y + 1 = 0$ の距離は、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

である。 $\frac{16}{5} < 4$ より $\frac{4}{5}\sqrt{5} < 2$ であるから、②式の表す領域が D の部分集合となるのは、

$a \leq \frac{4}{5}\sqrt{5}$ のときである。よって、求める a の最大値は $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ である。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	$\frac{1}{10}$
(2)	$\frac{7}{45}$
(3)	$\frac{25}{36}$

【解説】

(1)

以後、A, Bが1, 2, 3枚目に引いたカードに書かれた数をそれぞれ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ と表す。全部で3枚の札を引くときの札の選び方は $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。ここで、全部で3枚目の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つのは、 $a_1 + a_2 = b_1$ のときである。このときの (a_1, a_2, b_1) の組について b_1 で場合分けして考える。

[1] $b_1 = 1, 2$ のとき

$a_1 + a_2 \geq 1 + 2 = 3$ より、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たす (a_1, a_2) の組は存在せず不適である。

[2] $b_1 = 3$ のとき

$\{a_1, a_2\} = \{1, 2\}$ であり、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たす (a_1, a_2) の組は2通りである。

[3] $b_1 = 4$ のとき

$\{a_1, a_2\} = \{1, 3\}$ であり、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たす (a_1, a_2) の組は2通りである。

[4] $b_1 = 5$ のとき

$\{a_1, a_2\} = \{1, 4\}, \{2, 3\}$ であり、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たす (a_1, a_2) の組は4通りである。

[5] $b_1 = 6$ のとき

$\{a_1, a_2\} = \{1, 5\}, \{2, 4\}$ であり、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たす (a_1, a_2) の組は4通りである。

以上、[1]～[5]より、 $a_1 + a_2 = b_1$ を満たすのは12通りであるから、求める確率は $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$ となる。

(2)

全部で4枚の札を引くときの札の選び方は $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。ここで、全部で4枚目の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つのは、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ のときである。 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = k$ において、 k の値で場合分けして考える。

[1] $k \leq 4$ または $10 \leq k$ のとき、

k を2通りの方法で、1から6の異なる2つの自然数の和で表すことができないので不適である。

[2] $k = 5$ のとき、

k は $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ の和で表される。したがって、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は、取る札とその順序を考えて、 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)である。

[3] $k = 6$ のとき、

k は $\{1, 5\}, \{2, 4\}$ の和で表される。したがって、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は、取る札とその順序を考えて、 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)である。

[4] $k = 7$ のとき、

k は $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ の和で表される。したがって、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は、取る札とその順序を考えて、 ${}_3P_2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ (通り)である。

[5] $k = 8$ のとき、

k は $\{2, 6\}, \{3, 5\}$ の和で表される。したがって、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は、取る札とその順序を考えて、 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)である。

[6] $k = 9$ のとき、

k は $\{3, 6\}, \{4, 5\}$ の和で表される。したがって、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組は、取る札とその順序を考えて、 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)である。

以上、[1]～[6]より、 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ を満たすのは56通りであるから、求める確率は $\frac{56}{360} = \frac{7}{45}$ となる。

(3)

余事象「6枚の札が引かれるまでに1回以上 $a = b$ が成り立つ」確率を考える。札に書かれた数は互いに異なる自然数であることを考慮すると、全部で1枚の札が引かれた段階または全部で2枚の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つことはない。また、6枚の札に書かれた数の総和が21であることを考慮すると、全部で6枚の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つこともない。したがって、 $a = b$ となりうるのは、全部で3枚または4枚または5枚の札が引かれた段階である。さらに、札に書かれた数は互いに異なる自然数であることから、2回以上 $a = b$ が成り立つことはないとわかる。ここで、全部で5枚の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つ場合、すなわち $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$ となる場合を考える。全部で5枚の札を引くときの札の選び方は $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。いま、 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = k'$ とおくと、 $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 21$ で奇数であること、また、 $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 = 2k'$ で偶数であることから、 b_3 は奇数となる。以下、 b_3 の値で場合分けして考える。

[1] $b_3 = 1$ のとき、

$k' = 10$ であり、札に書かれた数は互いに異なる自然数であることに注意すると、

$$\begin{cases} \{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3, 5\} \\ \{b_1, b_2\} = \{4, 6\} \end{cases}$$

となる。したがって、 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$ を満たす $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ の組は、取る札の順序を考えて、 ${}_3P_3 \cdot 2 = 12$ (通り)である。

[2] $b_3 = 3$ のとき、

$k' = 9$ であり、札に書かれた数は互いに異なる自然数であることに注意すると、

$$\begin{cases} \{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 6\} \\ \{b_1, b_2\} = \{4, 5\} \end{cases}$$

となる。したがって、 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$ を満たす $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ の組は、取る札の順序を考えて、 ${}_3P_3 \cdot 2 = 12$ (通り)である。

[3] $b_3 = 5$ のとき、

$k' = 8$ であり、札に書かれた数は互いに異なる自然数であることに注意すると、

$$\begin{cases} \{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 4\} \\ \{b_1, b_2\} = \{2, 6\} \end{cases}$$

となる。したがって、 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$ を満たす $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ の組は、取る札の順序を考えて、 ${}_3P_3 \cdot 2 = 12$ (通り)である。

以上、[1]～[3]より、 $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$ を満たすのは36通りであるから、全部で5枚の札が引かれた段階で $a = b$ が成り立つ確率は $\frac{36}{720} = \frac{1}{20}$ となる。以上より、余事象の確率は(1), (2)の

結果と合わせて、 $\frac{1}{10} + \frac{7}{45} + \frac{1}{20} = \frac{11}{36}$ となるから、求める確率は、 $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$ である。

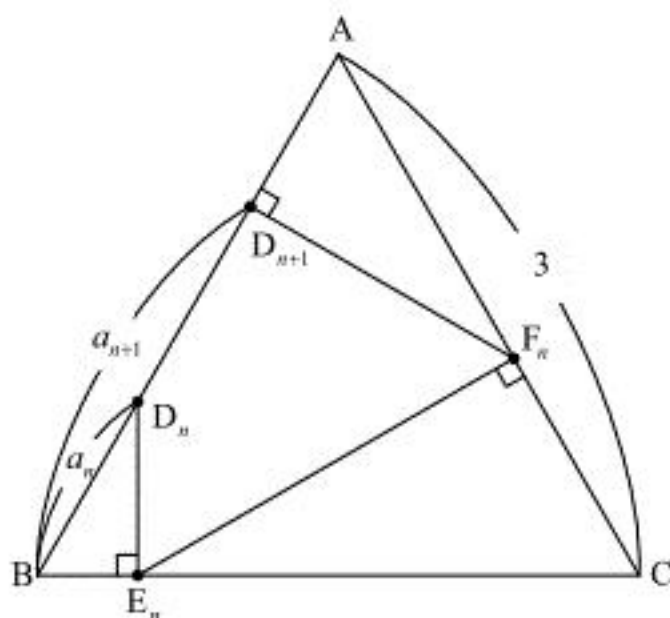
〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$a_2 = \frac{17}{8}, a_3 = \frac{127}{64}$	
(2)	11	

〔解説〕

(1)



条件より、 $\triangle BD_nE_n$, $\triangle CE_nF_n$, $\triangle AF_nD_{n+1}$ はそれぞれ辺の比が $2:\sqrt{3}:1$ の直角三角形であることに注意すると、 BE_n , CE_n , CF_n , AF_n , AD_{n+1} , BD_{n+1} はそれぞれ

$$BE_n = \frac{1}{2}BD_n = \frac{1}{2}a_n$$

$$CE_n = 3 - BE_n = -\frac{1}{2}a_n + 3$$

$$CF_n = \frac{1}{2}CE_n = -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2}$$

$$AF_n = 3 - CF_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2}$$

$$AD_{n+1} = \frac{1}{2}AF_n = \frac{1}{8}a_n + \frac{3}{4}$$

$$BD_{n+1} = 3 - AD_{n+1} = -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{4}$$

と a_n を用いて表せる。したがって、

$$a_{n+1} = -\frac{1}{8}a_n + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 2 = -\frac{1}{8}(a_n - 2)$$

が成り立つ。数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -1$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であることから、

$$a_n - 2 = -\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2 - \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

となる。よって、 $a_2 = \frac{17}{8}$, $a_3 = \frac{127}{64}$ である。

(2)

(1)より、

$$|a_n - 2| < 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8^{n-1}} < 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow -3(n-1)\log_{10} 2 < -9$$

$$\therefore n > 1 + \frac{3}{\log_{10} 2} = 10.9\dots$$

となる。よって、 $|a_n - 2| < 10^{-9}$ を満たす最小の自然数 n は 11 である。