

〔I〕

(1)

導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = 12x^3 - 3(3\log_2 a - 1)x^2 + 2(5\log_2 a - 7)x$$

と計算できる。 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとるから、 $f'(1)=0$ を満たす必要がある。

$$\begin{aligned} f'(1) &= 12 - 9\log_2 a + 3 + 10\log_2 a - 14 \\ &= 1 + \log_2 a \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \log_2 a &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 a &= -1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。逆に $a = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20 \\ f'(x) &= 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-12	$\nearrow$	20	$\searrow$	15	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとり、 $a = \frac{1}{2}$ は条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = 12x^3 - 3(3\log_2 a - 1)x^2 + 2(5\log_2 a - 7)x, \quad a = \frac{1}{2}$$

(2)

(1)より、 $f'(x)=0$ を満たす x の値は、

$$x = -2, 0, 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = -2, 0, 1$$

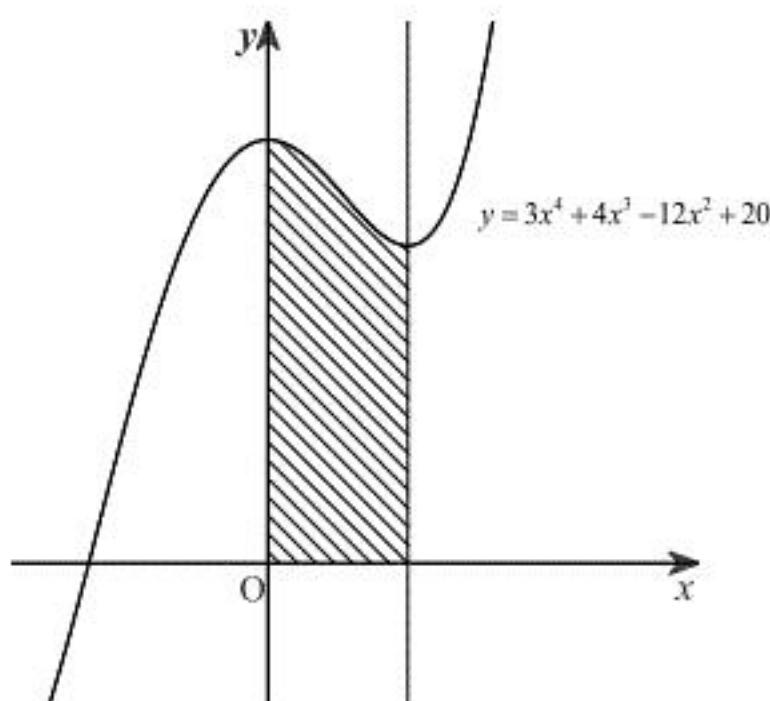
(3)

$f(x)$ の増減表は(1)に示した通りである。よって、関数 $f(x)$ は $x=-2$ で極小値 -12 、 $x=0$ で極大値 20 、 $x=1$ で極小値 15 をとる。

$$(\text{答}) \quad x = -2 \text{ で極小値 } -12, \quad x = 0 \text{ で極大値 } 20, \quad x = 1 \text{ で極小値 } 15$$

(4)

増減表をもとに、求める領域を図示すると下図の斜線部のようになる。



したがって、 $y=f(x)$ のグラフと、 x 軸、 y 軸、および $x=1$ のグラフで囲まれる図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20) dx \\ &= \left[\frac{3}{5}x^5 + x^4 - 4x^3 + 20x \right]_0^1 \\ &= \frac{88}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{88}{5}$$

〔Ⅱ〕

(1)

漸化式より $a_2 = 2a_1 + 1$ であるから,

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 \\ \Leftrightarrow 2a_1 + 1 &= -a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。また

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

より数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} a_n + 1 &= \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{2^n}{3} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \frac{2^n}{3} - 1$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^{n+2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^n (2^2 - 1) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

となるから, $a_{n+2} - a_n$ が 4 の倍数となる n の条件は,

$$n \geq 2$$

である。

$$(答) \quad n \geq 2$$

(3)

$a_2 = -a_1 = \frac{1}{3}$ であるから, b_2 は

$$\begin{aligned} b_2 &= \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{a_2}{2}\pi\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。また, $a_3 = 2a_2 + 1 = \frac{5}{3}$ であるから, b_3 は

$$\begin{aligned} b_3 &= \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{a_3}{2}\pi\right) \\ &= \sin\frac{5}{6}\pi + \cos\frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad b_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, b_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) (i)

(2)より, $n \geq 2$ に対し, $a_{n+2} = a_n + 4K_n$ (K_n は自然数)とおける。このとき,

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \sin\left(\frac{a_{n+2}}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{a_{n+2}}{2}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{a_n}{2}\pi + 2\pi \cdot K_n\right) + \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi + 2\pi \cdot K_n\right) \\ &= \sin\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) \\ &= b_n \end{aligned}$$

であるから, $b_n + b_{n+1} = b_{n+1} + b_{n+2}$ が成立する。よって, 帰納的に $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n + b_{n+1} &= b_2 + b_3 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

(4) (i)の結果より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m+1} b_k &= b_1 + (b_2 + b_3) + \cdots + (b_{2m-2} + b_{2m-1}) + (b_{2m} + b_{2m+1}) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 \cdot m \\ &= m + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \sum_{k=1}^{2m+1} b_k = m + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

〔Ⅲ〕

(1)

関数 $f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-a)(x-a-2) \\ &= 3(x-a)^2 - 6(x-a) \\ &= 3\{(x-a)-1\}^2 - 3 \\ &= 3\{x-(a+1)\}^2 - 3 \end{aligned}$$

となるから、点 P の座標は

$$(a+1, -3)$$

である。点 Q は点 P と x 軸について対称であるから、点 Q の座標は、

$$(a+1, 3)$$

となる。

(答) $P(a+1, -3), Q(a+1, 3)$

(2)

関数 $f(x)$ は、 $x \leq a$ 、 $a+2 \leq x$ において $f(x) \geq 0$ 、 $a < x < a+2$ において $f(x) < 0$ を満たす。 $y = g(x)$ は $a \leq x \leq a+2$ において $y = f(x)$ と x 軸について対称であるから、この範囲における関数 $g(x)$ の最大値は G の y 座標、つまり 3 である。これに注意し、 $y = f(x)$ のグラフの軸 $x = a+1$ に関して場合分けを行う。

[1] $a+1 < 2$ 、すなわち $0 < a < 1$ のとき

$0 \leq x \leq 4$ における $g(x)$ の最大値は 3 もしくは $g(4)$ のうち大きい方である。

$$\begin{aligned} g(4) &= f(4) \\ &= 3a^2 - 18a + 24 \\ &= 3(a-3)^2 - 3 \end{aligned}$$

であり、 $0 < a < 1$ において $g(4) = 3(a-3)^2 - 3 > 3(-2)^2 - 3 = 9$ より、 $g(4) > 3$ である。したがって、 $0 \leq x \leq 4$ において関数 $g(x)$ は $x = 4$ で最大値 $g(4) = 3(4-a)(2-a)$ をとる。

[2] $a+1 = 2$ 、すなわち $a = 1$ のとき

$$g(0) = g(4) = 9$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 4$ において関数 $g(x)$ は $x = 0, 4$ で最大値 $g(0) = g(4) = 9$ をとる。

[3] $a+1 > 2$ 、すなわち $a > 1$ のとき

$0 \leq x \leq 4$ における $g(x)$ の最大値は 3 もしくは $g(0)$ のうち大きい方である。

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ &= 3a(a+2) \\ &= 3(a+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

であり、 $a > 1$ において $g(0) = 3(a+1)^2 - 3 > 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$ より、 $g(0) > 3$ である。したがって、 $0 \leq x \leq 4$ において関数 $g(x)$ は $x = 0$ で最大値 $g(0) = 3a(a+2)$ をとる。

以上、[1], [2], [3] より、 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \text{ のとき} & \quad x = 4 \text{ で最大値 } 3(4-a)(2-a) \\ a = 1 \text{ のとき} & \quad x = 0, 4 \text{ で最大値 } 9 \\ a > 1 \text{ のとき} & \quad x = 0 \text{ で最大値 } 3a(a+2) \text{ をとる。} \end{aligned}$$

(答) 前述

(3)

$\overrightarrow{OP}$ 、 $\overrightarrow{OQ}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (a+1, -3) \\ \overrightarrow{OQ} &= (a+1, 3) \end{aligned}$$

と表せるから、内積は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (a+1)^2 - 9$$

となる。 $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ 、 $\overrightarrow{OQ} \neq \vec{0}$ より、 $\angle POQ = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} (a+1)^2 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow a+1 &= 3 \quad (\because a+1 > 1) \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2$

(4)

(2) より $a = 2$ のとき、点 A の座標は $(0, 24)$ である。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (-3, 27) \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, 6) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle APQ &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}|} \\ &= \frac{27 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + 27^2} \cdot 6} \\ &= \frac{9}{\sqrt{82}} \\ &= \frac{9\sqrt{82}}{82} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\cos \angle APQ = \frac{9\sqrt{82}}{82}$