

【 I 】

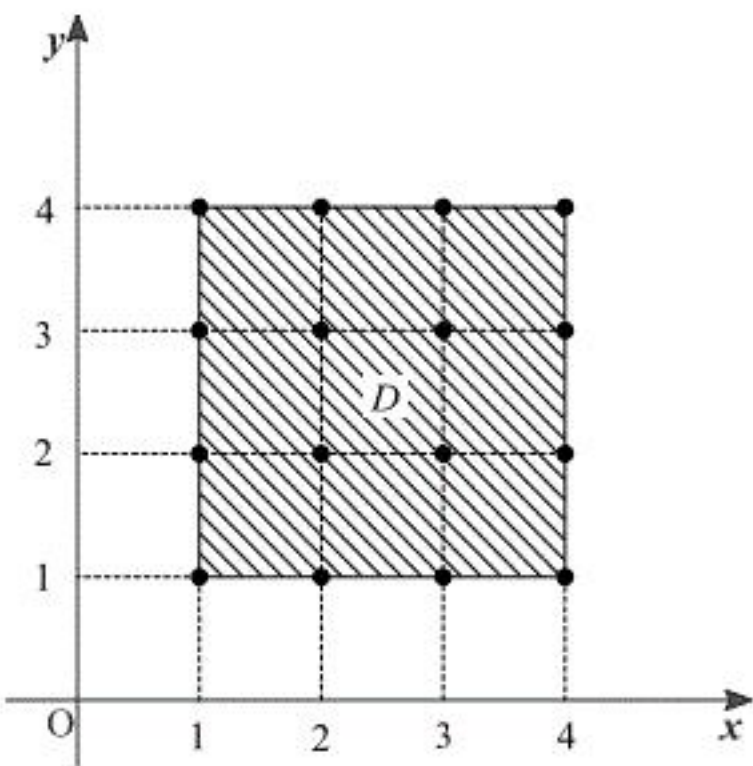
【解答】

(1)	(i)	ア	イ			
		1	6			
	(ii)	ウ	エ	オ		
		5	6	0		
	(iii)	カ	キ	ク	ケ	コ
		1	6	6	4	4
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	1	3	5	1	3	3
	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	1	3	6	6	1	0

【解説】

(1)

D を図示すると下図の斜線部分のようになる(ただし、境界線を含む)。



(i)

D に含まれる格子点 (x, y) について、 x 座標の選び方は $x=1, 2, 3, 4$ の4通りあり、それぞれの x について y 座標の選び方は $y=1, 2, 3, 4$ の4通りある。したがって、 D に含まれる格子点の総数は

$$4 \cdot 4 = 16$$

である。

(ii)

D に含まれる16個の格子点の中から、異なる3つの格子点を選ぶ選び方の総数は

$${}_{16}C_3 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

である。

(iii)

D に含まれる格子点を通る x 軸に平行な直線は $y=k$ ($k=1, 2, 3, 4$) の4通りあり、線分 $y=k$ ($1 \leq x \leq 4$) 上に格子点は4つある。したがって、選んだ3点が一直線上にあり、その直線が、 x 軸に平行である選び方の総数は

$$4 \cdot {}_4C_3 = 16$$

である。同様に、選んだ3点が一直線上にあり、その直線が、 y 軸に平行である選び方の総数も16である。また、 D に含まれる格子点を3つ以上通り、かつ傾きが1の直線は $y=x-1, x, x+1$ であり、それぞれの直線と D との共通部分に格子点はそれぞれ3つ、4つ、3つある。したがって、選んだ3点が一直線上にあり、その直線の傾きが1である選び方の総数は

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_3C_3 = 6$$

である。同様に、選んだ3点が一直線上にあり、その直線の傾きが-1である選び方の総数も6である。ここで、 D に含まれる格子点を3つ以上通る直線は x 軸または y 軸に平行な直線、あるいは傾きが1または-1の直線のみであることに注意すると、選んだ3点が一直線上にある選び方の総数は

$$16 + 16 + 6 + 6 = 44$$

である。

(2)

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 13 = 68 \quad \cdots \textcircled{1}$$

より点 $(1, 13)$ は L の要素である。点 (x, y) が L の要素であるとき、 $3x + 5y = 68$ が成り立つため、 $\textcircled{1}$ と辺々差をとると

$$\begin{aligned} (3x + 5y) - (3 \cdot 1 + 5 \cdot 13) &= 68 - 68 \\ \Leftrightarrow 3(x - 1) &= 5(13 - y) \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x - 1, 13 - y$ は整数で3と5は互いに素より、点 (x, y) が L の要素であるのは、 $x - 1$ が5の倍数のときである。 t を整数として、 $x - 1 = 5t$ とすると、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5t &= 5(13 - y) \\ \Leftrightarrow y &= 13 - 3t \end{aligned}$$

である。点 (x, y) が L の要素であるとき、つまり整数 t を用いて $x = 5t + 1, y = 13 - 3t$ と表せるとき、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (5t + 1)^2 + (13 - 3t)^2 \\ &= 34t^2 - 68t + 170 \\ &= 34(t - 1)^2 + 136 \end{aligned}$$

より、 $x^2 + y^2$ は $t = 1$ 、つまり $(x, y) = (6, 10)$ で最小値136をとる。また、 t は整数より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 1 \leq 20 \\ 13 - 3t \leq 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq t \leq \frac{19}{5} \\ &\therefore t = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

となるため、集合 $L \cap E$ の要素の個数は6である。点 (x, y) が $L \cap E$ の要素であるとき、

$$x + y = 5t + 1 + 13 - 3t = 2t + 14 \quad (t = -2, -1, \dots, 3)$$

より、 $x + y$ は $t = -2$ 、つまり $(x, y) = (-9, 19)$ で最小値10をとる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

	ア								
	4								
(1)	イ	ウ							
	3	0							
(2)	エ	オ	カ	キ					
	5	－	1	6					
(3)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ		
	1	6	3	4	－	7	8		
	ソ	タ	チ	ツ	テ				
	－	7	1	5	8				

〔解説〕

P は C 上の点であるから

$$|\vec{p}|=4$$

である。同様に、 $|\vec{q}|=|\vec{r}|=4$ である。

(1)

G は三角形 PQR の重心より

$$\overrightarrow{\text{OG}}=\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$$

が成り立つため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OS}} &= \vec{p}+\vec{q}+\vec{r} \\ &= 3\overrightarrow{\text{OG}}\end{aligned}$$

であり、ベクトル $\overrightarrow{\text{PS}}$ と $\overrightarrow{\text{QR}}$ の内積は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PS}}\cdot\overrightarrow{\text{QR}} &= (\overrightarrow{\text{OS}}-\vec{p})\cdot(\vec{r}-\vec{q}) \\ &= (\vec{q}+\vec{r})\cdot(\vec{r}-\vec{q}) \\ &= |\vec{r}|^2-|\vec{q}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

(2)

3 点 P, Q, R は異なる点であるため $\overrightarrow{\text{PQ}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\text{PR}}\neq\vec{0}$ である。したがって、

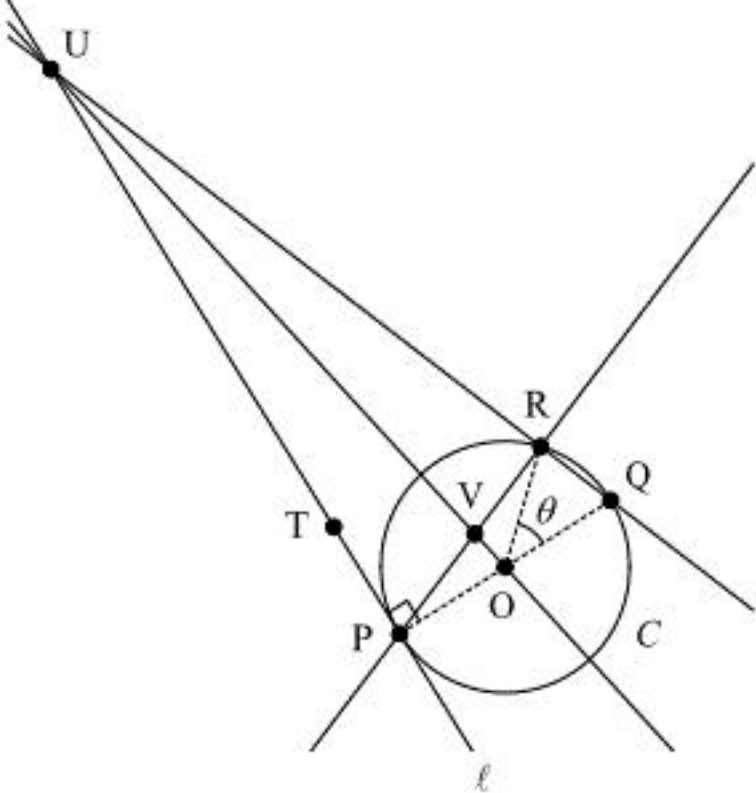
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PQ}}\cdot\overrightarrow{\text{PR}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\angle\text{QPR} &= 0 \\ \Leftrightarrow \angle\text{QPR} &= \frac{\pi}{2} \left(\because 0<\angle\text{QPR}<\pi \right)\end{aligned}$$

である。このとき、円周角の定理より $\angle\text{QOR}=\pi$ であるから、内積の定義より

$$\begin{aligned}\vec{q}\cdot\vec{r} &= |\vec{q}||\vec{r}|\cos\pi \\ &= -16\end{aligned}$$

である。

(3)



C, ℓ および O, P, Q, R, T, U, V を図示すると上図のようになる。T は ℓ 上の点より $\overrightarrow{\text{PT}}\perp\overrightarrow{\text{OP}}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PT}}\cdot\overrightarrow{\text{OP}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{OT}}-\vec{p})\cdot\vec{p} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OT}}\cdot\vec{p}-|\vec{p}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OT}}\cdot\vec{p} &= 16 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $\text{QR}=2\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned}|\vec{q}-\vec{r}| &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |\vec{q}-\vec{r}|^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow |\vec{q}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{r}+|\vec{r}|^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow \vec{q}\cdot\vec{r} &= 12\end{aligned}$$

となり、 $\vec{q}$ と $\vec{r}$ のなす角を θ とすると、内積の定義より

$$\begin{aligned}\vec{q}\cdot\vec{r} &= 12 \\ \Leftrightarrow |\vec{q}||\vec{r}|\cos\theta &= 12 \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

である。ここで、U は ℓ 上の点であり、 $\textcircled{1}$ より $\overrightarrow{\text{OU}}\cdot\vec{p}=16$ が成り立つ。したがって、 $\vec{q}=-\vec{p}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OU}}\cdot\vec{p} &= 16 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{QU}}+\vec{q})\cdot(-\vec{q}) &= 16 \\ \Leftrightarrow t\overrightarrow{\text{QR}}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2 &= -16 \\ \Leftrightarrow t(\vec{q}\cdot\vec{r}-|\vec{q}|^2) &= -32 \\ \Leftrightarrow t &= 8\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OU}} &= 8\overrightarrow{\text{QR}}+\vec{q} \\ &= -7\vec{q}+8\vec{r}\end{aligned}$$

である。U は線分 QR を 8:7 に外分する点であり、 $\text{OP}=\text{OQ}$ であることに注意すると、三角形 PQR と直線 OU についてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{\text{PO}}{\text{OQ}}\cdot\frac{\text{QU}}{\text{UR}}\cdot\frac{\text{RV}}{\text{VP}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{\text{RV}}{\text{VP}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \text{RV}:\text{VP} &= 7:8\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、V は線分 PR を 8:7 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OV}} &= \frac{7}{15}\vec{p}+\frac{8}{15}\vec{r} \\ &= -\frac{7}{15}\vec{q}+\frac{8}{15}\vec{r}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	4	7	3	1	2	2	1
	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	2	6	2	7	1	8	
(2)	セ	ソ					
	0	7					
(3)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	
	2	1	1	8	1	8	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} a-b &= \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{10}-2) - \log_{\frac{1}{2}}\{7(\sqrt{10}-3)\} \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{10}-2}{7(\sqrt{10}-3)} \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+3)}{7(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)} \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{10}+4}{7} \end{aligned}$$

である。 $3^2 < 10 < 4^2$ より $3 < \sqrt{10} < 4$ であるから $[\sqrt{10}] = 3$ であり、 $[\sqrt{10}+4] = 7$ より

$\frac{\sqrt{10}+4}{7} = t$ とおくとき $[t] = 1$ である。ここで、 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x (x > 0)$ とすると、底が $\frac{1}{2} < 1$ より $f(x)$ は $x > 0$ において単調に減少する。したがって、 $[t] = 1$ より t は、 $1 < t$ を満たすから、

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} t &< \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ \Leftrightarrow a-b &< 0 \\ \Leftrightarrow a &< b \end{aligned}$$

である。また、底の変換公式を用いると

$$\begin{aligned} a &= \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{10}-2) \\ &= \frac{\log_2(\sqrt{10}-2)}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= -\log_2(\sqrt{10}-2) \\ &= \log_2 \frac{1}{\sqrt{10}-2} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{10}+2}{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{10}+2}{6} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} 4^a &= (2^a)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{10}+2}{6}\right)^2 \\ &= \frac{2\sqrt{10}+7}{18} \end{aligned}$$

である。

(2)

A, B は整数より

$$\begin{aligned} [\log_3 A] &= m \\ \Leftrightarrow m &\leq \log_3 A < m+1 \\ \therefore 3^m &\leq A \leq 3^{m+1}-1 \\ [\log_3 B] &= m+2 \\ \Leftrightarrow m+2 &\leq \log_3 B < m+3 \\ \therefore 3^{m+2} &\leq B \leq 3^{m+3}-1 \end{aligned}$$

であるから、 $B-A$ の最小値は

$$3^{m+2} - (3^{m+1} - 1) = 6 \times 3^m + 1$$

であり、最大値は

$$(3^{m+3} - 1) - 3^m = 26 \times 3^m - 1$$

である。

(3)

(2)の結果より $6 \times 3^m + 1 \leq B - A \leq 26 \times 3^m - 1$ であり、これに $A = n+8, B = n+150$ を代入すると

$$\begin{aligned} 6 \times 3^m + 1 &\leq 142 \leq 26 \times 3^m - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{11}{2} &\leq 3^m \leq \frac{141}{6} \end{aligned}$$

となる。 3^x は単調増加関数であり $3^1 < \frac{11}{2} \leq 3^2 \leq \frac{141}{6} < 3^3$ であるから $m = 2$ となる。このとき、

n は正の整数より

$$\begin{aligned} [\log_3(n+8)] &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq \log_3(n+8) < 3 \\ \Leftrightarrow 3^2 &\leq n+8 < 3^3 \\ \therefore 1 &\leq n \leq 18 \\ [\log_3(n+150)] &= 4 \\ \Leftrightarrow 4 &\leq \log_3(n+150) < 5 \\ \Leftrightarrow 3^4 &\leq n+150 < 3^5 \\ \therefore 1 &\leq n \leq 92 \quad (\because n > 0) \end{aligned}$$

である。したがって、集合 S を

$$S = \{n \mid [\log_3(n+8)] = 2, \ n : \text{正の整数}\}$$

で定めると、

$$S = \{n \mid 1 \leq n \leq 18, \ n : \text{正の整数}\}$$

であり、集合 S の要素の個数は18である。また、集合 T を

$$T = \{n \mid [\log_3(n+150)] = 4, \ n : \text{正の整数}\}$$

で定めると、

$$T = \{n \mid 1 \leq n \leq 92, \ n : \text{正の整数}\}$$

となり、 $S \subset T$ である。以上より、 $[\log_3(n+150)] = [\log_3(n+8)] + 2$ を満たす正の整数 n の個数は18である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ						
	3	4	3						
(1)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
	0	4	6	9	2	4	1	2	
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
	6	2	7	2	2	9	4		

〔解説〕

$$f(x)=x(x-3)^2 \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3-6x^2+9x)' \\ &= 3(x^2-4x+3) \end{aligned}$$

である。

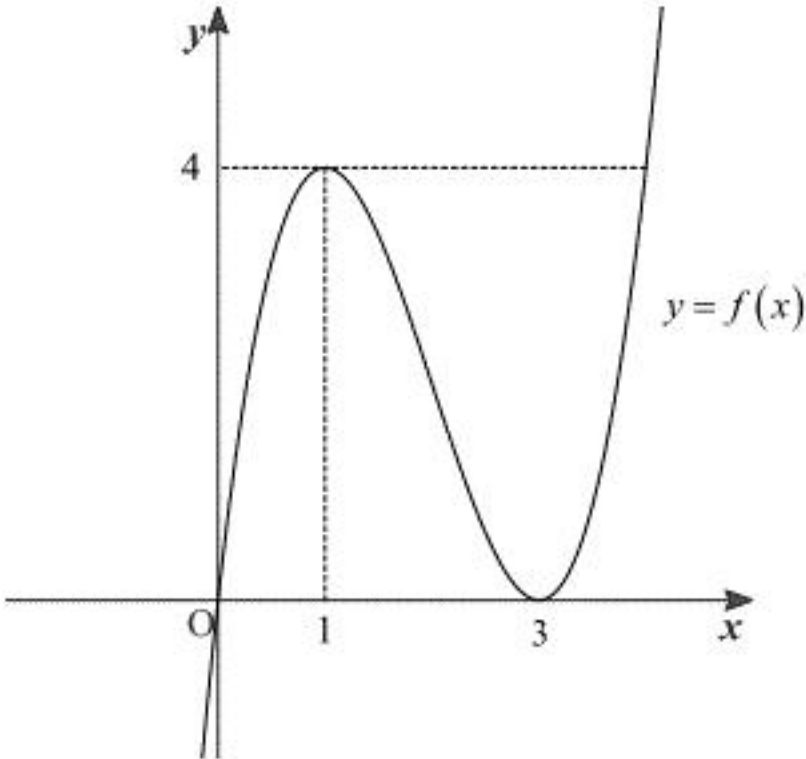
(1)

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)$$

より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

増減表より $y=f(x)$ のグラフを図示すると下図のようになる。



したがって、方程式 $x(x-3)^2=k$ が異なる3個の実数解をもつのは $y=f(x)$ のグラフと直線

$y=k$ が3個の共有点をもつときであるから、求める k の範囲は

$$0 < k < 4$$

である。ここで、 α, β, γ は $f(x)=k$ 、つまり $x^3-6x^2+9x-k=0$ の異なる3つの実数解であるから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=6 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=9 \end{cases}$$

である。 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) が等差数列をなすとき、 $\alpha+\gamma=2\beta$ となるため、

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 6 \\ \Leftrightarrow 3\beta &= 6 \\ \Leftrightarrow \beta &= 2 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha+\gamma=4 \\ 2(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma=9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha+\gamma=4 \\ \alpha\gamma=1 \end{cases} \end{aligned}$$

より α は $\alpha^2-4\alpha+1=0$ を満たす。また、

$$\begin{aligned} k &= f(\beta) \\ &= 2 \cdot (2-3)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \int_a^2 \{f(x)-2\} dx &= \int_a^2 (x^3-6x^2+9x-2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2-2x \right]_a^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} \right) u^4 + 2u^3 + \left(-\frac{9}{2} \right) u^2 + 2u + 2 \end{aligned}$$

である。 $\left(-\frac{1}{4} \right) u^4 + 2u^3 + \left(-\frac{9}{2} \right) u^2 + 2u + 2 = \left(-\frac{1}{4}u^2 + u - \frac{1}{4} \right) (u^2 - 4u + 1) + \frac{9}{4}$ であり、 α は

$\alpha^2-4\alpha+1=0$ を満たすから

$$\begin{aligned} \int_a^2 \{f(x)-2\} dx &= \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{4} \right) (\alpha^2 - 4\alpha + 1) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	
8	1	2	3	2	5	2	2	
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
2	7	5	1	3	1	6	2	4

〔解説〕

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 3a_n, a_1 = \frac{7}{2}, a_2 = 5 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2}a_2 + 3a_1 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 5 + 3 \cdot \frac{7}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。ここで、 $b_n = a_{n+1} + 2a_n$ とするとき、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 + 2a_1 \\ &= 5 + 2 \cdot \frac{7}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{1}{2}a_{n+1} + 3a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_{n+1} + 3a_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= \frac{3}{2}b_n \end{aligned}$$

より $s=3, t=2$ である。よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 12、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であるから、その一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{3^n}{2^{n-3}} \\ \therefore a_{n+1} + 2a_n &= \frac{3^n}{2^{n-3}} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。さらに、 $c_n = a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n$ とするとき、

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 - \frac{3}{2}a_1 \\ &= 5 - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{1}{2}a_{n+1} + 3a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} &= -2a_{n+1} + 3a_n \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= -2c_n \end{aligned}$$

より $r=-2$ である。よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 $-\frac{1}{4}$ 、公比 -2 の等比数列であるから、その一般項は

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-3} \\ \therefore a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n &= -(-2)^{n-3} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。したがって、①と②の辺々差をとると

$$\begin{aligned} (a_{n+1} + 2a_n) - \left(a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n\right) &= \frac{3^n}{2^{n-3}} - \left\{-(-2)^{n-3}\right\} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2}a_n &= \frac{3^n}{2^{n-3}} + (-2)^{n-3} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{7} \times \left\{\frac{3^n}{2^{n-4}} - (-2)^{n-2}\right\} \end{aligned}$$

である。以上より、 $a_n < 0$ となるとき

$$\begin{aligned} a_n &< 0 \\ \Leftrightarrow 3^n &< (-1)^{n-2} \cdot 2^{2n-6} \quad (\because 2^{n-4} > 0) \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 $3^n > 0, 2^{2n-6} > 0$ より、③が成り立つためには $(-1)^{n-2} > 0$ 、つまり n が偶数であることが必要である。よって、 $n=2m$ ($m=1, 2, \dots$) とすると③は

$$\begin{aligned} 3^{2m} &< 2^{4m-6} \\ \Leftrightarrow 2m \log_2 3 &< 4m-6 \\ \Leftrightarrow \log_2 3 &< 2 - \frac{3}{m} \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

となるため、 $1.58 < \log_2 3 < 1.59$ より

$$\begin{aligned} 1.58 &< 2 - \frac{3}{m} \\ \Leftrightarrow m &> \frac{1}{0.14} \\ \therefore m &\geq 8 \end{aligned}$$

であることが必要である。 $m=8$ とすると $2 - \frac{3}{8} = 1.625$ となりこれは $\log_2 3 < 2 - \frac{3}{m}$ を満たしている。したがって、 $a_n < 0$ となる最小の n は、16 である。また、 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 24 \\ &= \frac{3^{n+1}}{2^{n-3}} - 24 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 3b_n - S_n &= 3 \cdot \frac{3^n}{2^{n-3}} - \left(\frac{3^{n+1}}{2^{n-3}} - 24\right) \\ &= 24 \end{aligned}$$

である。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	4	7	2	1	2	3
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	7	0	2	6	3	9
	ス	セ	ソ	タ		
	4	3	9	4		

〔解説〕

(1) $t = \sin x$ とおくと、 $dt = \cos x dx$ であり、対応は以下のようになる。

x	0	→	$\frac{\pi}{6}$
t	0	→	$\frac{1}{2}$

したがって、置換積分を行うと、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1 - \sin^2 x} \cdot \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{1 - t^2}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t - 1} \right)$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t - 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\log 3}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sin x}$ ($0 < x < 2\pi$, $x \neq \pi$) とすると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{e^{-x} (-\sin x - \cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

である。三角関数の合成を用いると、

$$-\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{5}{4} \pi \right)$$

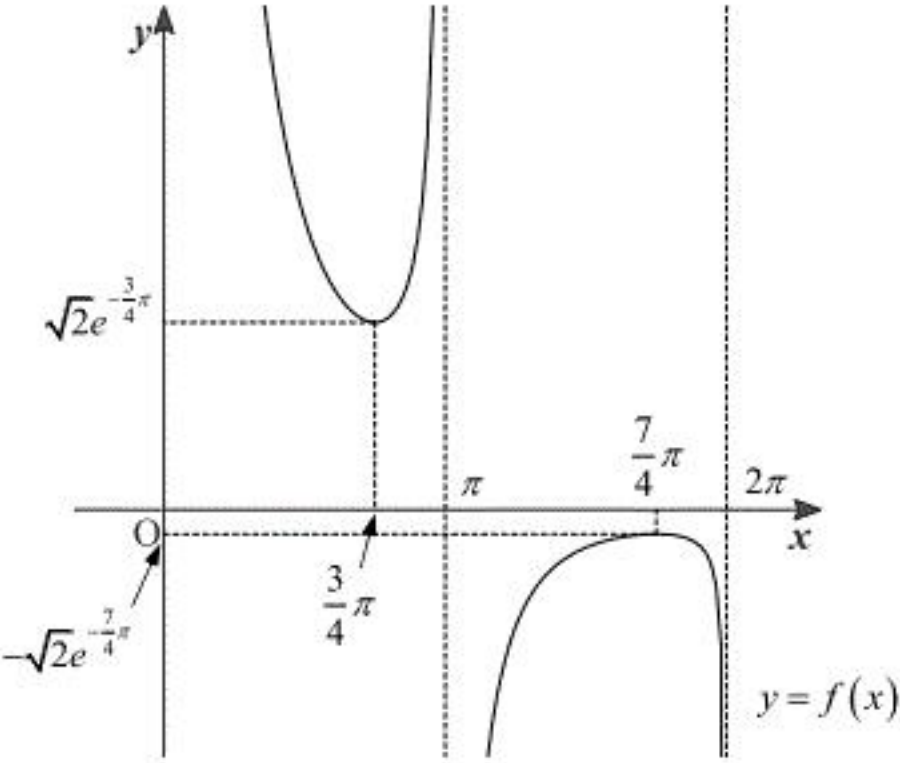
である。以上より、 $f'(x) = 0$ となる x の値は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\sin x - \cos x &= 0 \left(\because \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \neq 0 \right) \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{5}{4} \pi \right) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{4} \pi, \frac{7}{4} \pi \left(\because 0 < x < 2\pi, x \neq \pi \right) \end{aligned}$$

であり、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$\frac{3}{4} \pi$	...	(π)	...	$\frac{7}{4} \pi$	...	(2π)
$f'(x)$		-	0	+		+	0	-	
$f(x)$		↘	$\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	↗		↗	$-\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$	↘	

よって、 $0 < x < \pi$ において、 $f(x)$ は減少したのち増加する。 $\pi < x < 2\pi$ において、 $f(x)$ は増加したのち減少する。また、 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} f(x) = -\infty$ より、 $y = f(x)$ のグラフを図示すると下図のようになる。



方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数は $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数に等しいから、方程式 $f(x) = k$ の、実数解の個数が 0 であるのは、

$$-\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi} < k < \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

のときである。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	
0	1	1	5	1	
カ	キ	ク	ケ	コ	サ
－	6	2	1	1	2
シ	ス	セ	ソ	タ	チ
3	1	2	4	6	5

〔解説〕

$$f(x)=x^k\log x\ (x>0) \text{ とすると,}$$

$$f'(x)=kx^{k-1}\log x+x^k\cdot\frac{1}{x}$$

$$=x^{k-1}(k\log x+1)$$

であり,

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow k\log x+1=0\ (\because x>0)$$

$$\Leftrightarrow \log x=-\frac{1}{k}\ (\because k<0)$$

$$\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{k}}$$

より $a=e^{-\frac{1}{k}}$ である。よって, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$e^{-\frac{1}{k}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			極大	

増減表より $x=a$ において, $f(x)$ は極大値であり, 最大値でもある。さらに,

$$f''(x)=(k-1)x^{k-2}(k\log x+1)+x^{k-1}\cdot\frac{k}{x}$$

$$=x^{k-2}\{k(k-1)\log x+(k-1)+k\}$$

$$=x^{k-2}\{k(k-1)\log x+2k-1\}$$

であり,

$$f''(x)=0$$

$$\Leftrightarrow k(k-1)\log x+2k-1=0\ (\because x>0)$$

$$\Leftrightarrow \log x=-\frac{2k-1}{k(k-1)}\ (\because k-1<k<0)$$

$$\Leftrightarrow x=e^{-\frac{2k-1}{k(k-1)}}$$

より $b=e^{-\frac{2k-1}{k(k-1)}}$ である。ここで,

$$-\frac{2k-1}{k(k-1)}-\left(-\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{k-1}>0\ (\because k<0)$$

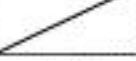
$$\therefore -\frac{1}{k}<-\frac{2k-1}{k(k-1)}$$

であり, e^x は単調増加関数であるから, a と b を比較すると,

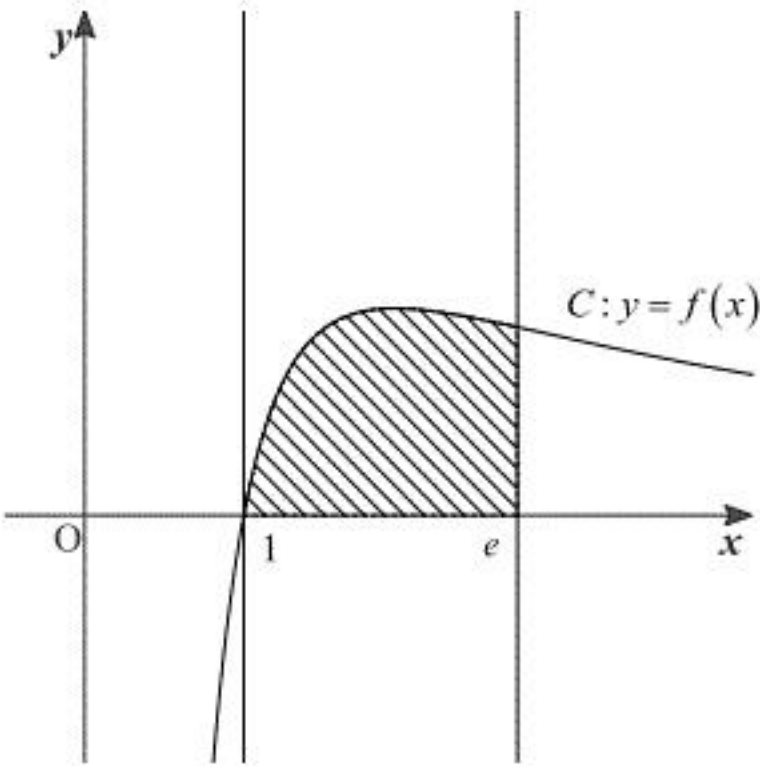
$$e^{-\frac{1}{k}}<e^{-\frac{2k-1}{k(k-1)}}$$

$$\Leftrightarrow a<b$$

である。以上より, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	a	...	b	...	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	($-\infty$)						(0)

よって, $0<x<a$ において, $f(x)$ はつねに増加し, C は上に凸である。 $a<x<b$ において, $f(x)$ はつねに減少し, C は上に凸である。 $b<x$ において, $f(x)$ はつねに減少し, C は下に凸である。また, $k=-\frac{3}{2}$ のとき, C と 2 直線 $x=1, x=e$ および x 軸で囲まれた部分を図示すると下図の斜線部分のようになる。



したがって, 求める面積 S は部分積分法より

$$S=\int_1^ef(x)dx$$

$$=\int_1^ex^{-\frac{3}{2}}\log xdx$$

$$=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\log x\right]_1^e+2\int_1^ex^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\log x-4x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^e$$

$$=4-6e^{-\frac{1}{2}}$$

である。