

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ		
	5	1	8		
(2)	エ	オ	カ		
	2	2	7		
(3)	キ	ク	ケ	コ	
	1	1	7	2	
(4)	サ	シ	ス		
	5	3	3		
(5)	セ	ソ	タ	チ	
	2	7	2	9	
(6)	ツ	テ	ト		
	1	5	4		
(7)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
	1	1	7	2	9

【解説】

(1)
 a, b, c, d を 0 以上の整数として、1 または 2 の目が出た回数を a 、3 の目が出た回数を b 、4 または 5 の目が出た回数を c 、6 の目が出た回数を d とおく。サイコロを 2 回投げたときの目の出方は $6^2 = 36$ (通り) あり、これらは同様に確からしい。このとき、P の座標が $(0, 0)$ となるのは $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ のときである。 $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$ となる場合は ${}_2C_1 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)、 $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 1)$ となる場合は ${}_2C_1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ (通り) があるから、求める確率は

$$\frac{8+2}{36} = \frac{5}{18}$$

である。

(2)
サイコロを 4 回投げたときの目の出方は 6^4 通りあり、これらは同様に確からしい。P が x 軸方向に 1 だけ動いた回数と -1 だけ動いた回数がともに 2 であり、4 回投げたときの P の座標が $(0, 0)$ となるのは、 $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0)$ のときである。この場合は ${}_4C_2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 96$ (通り) があるから、求める確率は

$$\frac{96}{6^4} = \frac{2}{27}$$

である。

(3)
サイコロを 4 回投げたとき P の座標が $(0, 0)$ となるのは、
 $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 2, 0, 2)$ のときである。 $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0)$ となる場合は (2) より ${}_4C_2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 96$ (通り)、 $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ となる場合は $4! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ (通り)、 $(a, b, c, d) = (0, 2, 0, 2)$ となる場合は ${}_4C_2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 = 6$ (通り) があるから、求める確率は

$$\frac{96+96+6}{6^4} = \frac{11}{72}$$

である。

(4)
 $(a, b, c, d) = (2, 0, 2, 0)$ のとき出た目の総和が 14 となるのは、2 が 2 回、5 が 2 回出たときの ${}_4C_2 = 6$ (通り) がある。 $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ のとき出た目の総和が 14 となるのは、1, 3, 4, 6 が 1 回ずつ出たときの $4! = 24$ (通り) がある。 $(a, b, c, d) = (0, 2, 0, 2)$ のとき出た目の総和は $3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 18$ であり、14 とはならない。以上より、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{6+24}{\frac{6^4}{\frac{11}{72}}}}{\frac{11}{72}} = \frac{5}{33}$$

である。

(5)
サイコロを 6 回投げたときの目の出方は 6^6 通りあり、これらは同様に確からしい。サイコロを 6 回投げたときの P の座標が $(4, 2)$ となるのは、 $(a, b, c, d) = (4, 2, 0, 0)$ のときである。このうち、途中で P の座標が $(1, 1)$ となるのは、初めの 2 回で $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 0)$ となり、あとの 4 回で $(a, b, c, d) = (3, 1, 0, 0)$ となるときである。この場合は ${}_2C_1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot {}_4C_1 \cdot 2^3 \cdot 1 = 2^7$ (通り) があるから、求める確率は

$$\frac{2^7}{6^6} = \frac{2}{729}$$

である。

(6)
サイコロを 6 回投げたとき P の座標が $(4, 0)$ となるのは、 $(a, b, c, d) = (5, 0, 1, 0), (4, 1, 0, 1)$ のときである。 $(a, b, c, d) = (5, 0, 1, 0)$ となる場合は ${}_6C_1 \cdot 2^5 \cdot 2 = 3 \cdot 2^7$ (通り)、

$(a, b, c, d) = (4, 1, 0, 1)$ となる場合は $\frac{6!}{4!1!1!} \cdot 2^4 \cdot 1 \cdot 1 = 15 \cdot 2^5$ (通り) があるから、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 2^7 + 15 \cdot 2^5}{6^6} = \frac{1}{54}$$

である。

(7)
サイコロを 6 回投げたときの P の座標が $(4, 0)$ であり、かつ途中で P の座標が $(2, 0)$ となる回数が 2 以上となる場合を考える。これは、初めの 2 回で $(a, b, c, d) = (2, 0, 0, 0)$ 、次の 2 回で $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$ または $(0, 1, 0, 1)$ 、最後の 2 回で $(a, b, c, d) = (2, 0, 0, 0)$ となるときの、 $2^2 \cdot ({}_2C_1 \cdot 2 \cdot 2 + {}_2C_1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 2^2 = 5 \cdot 2^5$ (通り) がある。よって、この場合の確率は

$$\frac{5 \cdot 2^5}{6^6} = \frac{5}{1458}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{1}{54} - \frac{5}{1458} = \frac{11}{729}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	1	2	3	2	1	1	9	4	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
7	9	3	9	7	1	5	4	0	1

〔解説〕

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = -\frac{5}{12}$$

である。よって、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \theta \\ &= 9 + 4 + 5 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{2} \quad (\because AB > 0)$$

を得る。 $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

であり、三角形 OAB の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \theta = \frac{\sqrt{119}}{4}$$

である。また、M が辺 AB の中点であるとき $AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ であるから、中線定理より、

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= 2(OM^2 + AM^2) \\ \Leftrightarrow 9 + 4 &= 2\left(OM^2 + \frac{9}{2}\right) \\ \Leftrightarrow OM^2 &= 2 \\ \therefore OM &= \sqrt{2} \quad (\because OM > 0) \end{aligned}$$

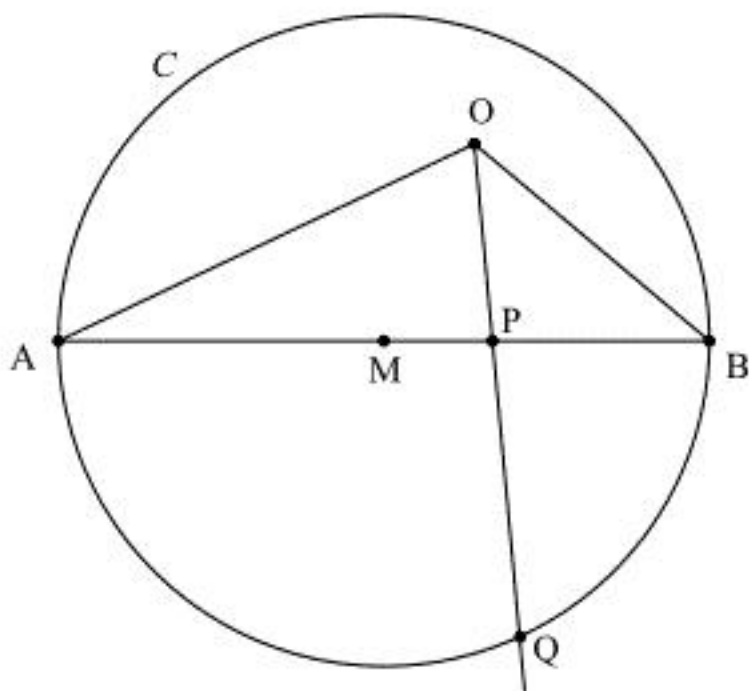
となる。P は線分 AB を $t:1-t$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= (1-t)^2 |\overrightarrow{OA}|^2 + 2(1-t)t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 9(t^2 - 2t + 1) + 5(t^2 - t) + 4t^2 \\ &= 18t^2 - 23t + 9 \end{aligned}$$

である。



$OM < AM$ より O は C の内部に存在することに注意すると、上図のようになる。

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OP} = s\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\}$$

より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OM} &= \frac{s}{2} \left\{ (1-t) |\overrightarrow{OA}|^2 + (1-t+t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t |\overrightarrow{OB}|^2 \right\} \\ &= \frac{s}{2} \left\{ 9(1-t) - \frac{5}{2} + 4t \right\} \\ &= s \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}t \right) \end{aligned}$$

である。 $MQ^2 = OQ^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2$ と $MQ = AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ より、

$$\begin{aligned} OQ^2 &= MQ^2 + 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OM} - OM^2 \\ &= \frac{9}{2} + 2s \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}t \right) - 2 \\ &= \frac{1}{2}(5 + 13s - 10st) \end{aligned}$$

を得る。ゆえに、 $s = \frac{5}{2}$ のとき $OQ^2 = \frac{25}{2} \left(\frac{3}{2} - t \right)$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{OQ}{OP} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2OQ &= 5OP \\ \Leftrightarrow 4OQ^2 &= 25OP^2 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{25}{2} \left(\frac{3}{2} - t \right) &= 25(18t^2 - 23t + 9) \\ \Leftrightarrow 3 - 2t &= 18t^2 - 23t + 9 \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 7t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t-1)(3t-2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
3	8	1	2	3	2	3	2	5	2	7	8
ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	
8	1	1	6	2	4	-	6	7	2	4	

〔解説〕

すべての x に対して、

$$\cos(-x) = \cos x$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} 5 \sin(x + \alpha) &= 5(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) \\ &= 4 \sin x - 3 \cos x \end{aligned}$$

が成り立つ。これらより、

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \sin(x + \alpha) \cos(-x) \\ &= (4 \sin x - 3 \cos x) \cos x \\ &= 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x \\ &= 4 \cdot \frac{\sin 2x}{2} - 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

$$2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x = \frac{5}{2} \left\{ \frac{4}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \right\}$$

であるから、 $\sin \beta = -\frac{3}{5}$ 、 $\cos \beta = \frac{4}{5}$ を満たす実数 β ($0 \leq \beta < 2\pi$) を用いて

$$2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x = \frac{5}{2} \sin(2x + \beta)$$

となる。 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin \beta < 0$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \beta < 1$ より、 β は $\frac{7}{4}\pi < \beta < 2\pi$ を満たす。 $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ のと

き、 $-\frac{\pi}{4} + \beta \leq 2x + \beta \leq \frac{\pi}{4} + \beta$ であり、 $\frac{3}{2}\pi < -\frac{\pi}{4} + \beta < \frac{7}{4}\pi$ 、 $2\pi < \frac{\pi}{4} + \beta < \frac{9}{4}\pi$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{2} \sin(2x + \beta) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

は、 $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ においてつねに増加する。したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{8}$ で最大値

$$2 \sin \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-6 + \sqrt{2}}{4}$$

をとり、 $x = -\frac{\pi}{8}$ で最小値

$$2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = \frac{-6 - \sqrt{2}}{4}$$

をとる。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ				
	4	1	6	2	1				
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	4	3	4	2	2	9	4	0	3
(3)	ソ	タ	チ						
	7	1	6						

〔解説〕

(1)

10 の正の約数は 1, 2, 5, 10 の 4 個である。 x, y がそれぞれ正の整数であるとき $1 \leq x, 5 \leq y+4$ であるから、 $x(y+4)=10$ を満たす x, y の組は

$$\begin{aligned} (x, y+4) &= (1, 10), (2, 5) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (1, 6), (2, 1) \end{aligned}$$

である。

(2)

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$$

であるから、初項から第 n 項までの和 S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n(2+n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+3) \end{aligned}$$

である。 $\{a_n\}$ の第 l 項から第 $l+m$ 項までの和 T は、

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=l}^{l+m} \frac{1}{2}(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(m+1)\{(l+1)+(l+m+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(m+1)(m+2l+2) \end{aligned}$$

である。 よって

$$\begin{aligned} T &= 125 \\ \Leftrightarrow (m+1)(m+2l+2) &= 500 \end{aligned}$$

となる。 $(m+2l+2)-(m+1)=2l+1$ より $m+1$ と $m+2l+2$ の偶奇は異なり、 $2 \leq m+1 < m+2l+2$ でもあるから、 $(m+1, m+2l+2)$ の組の候補は $(4, 125), (5, 100), (20, 25)$ である。 このうち、 l, m が $l \geq m$ を満たす正の整数となるのは、

$$(l, m) = (47, 4) \text{ および } (60, 3)$$

である。

(3)

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

であり、初項から第 n 項までの和 U_n は

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n 4 \cdot 5^{k-1} \\ &= 4 \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} \\ &= 5^n - 1 \end{aligned}$$

である。 $U_4 = 5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1) = 24 \cdot 26 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13$ であり、 $50 < y+50$ であるから、

$(x, y+50)$ の組の候補は $(12, 52), (8, 78), (6, 104), (4, 156), (3, 208), (2, 312), (1, 624)$ である。 このうち、 x, y が $x \leq y$ を満たす正の整数となるのは、

$$(x, y) = (8, 28), (6, 54), (4, 106), (3, 158), (2, 262), (1, 574)$$

の 6 個である。

〔V〕

〔解答〕

		ア	イ					
		3	6					
(1)		ウ	エ					
		－	7					
(2)		オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
		6	3	3	1	2	3	
(3)		サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
		4	4	2	5	8	5	7

〔解説〕

C 上の点 $(t, -4t^2 - 3)$ を頂点とする放物線の方程式は、 a を 0 でない実数として、

$$y = a(x - t)^2 - 4t^2 - 3$$

と書ける。この放物線が点 $(t + 1, -4t^2)$ を通るから、

$$\begin{aligned} -4t^2 &= a - 4t^2 - 3 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

となり、放物線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 3(x - t)^2 - 4t^2 - 3 \\ &= 3x^2 - 6tx - t^2 - 3 \end{aligned}$$

である。

(1)

放物線①が、点 $(-3, 5)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot (-3)^2 - 6t \cdot (-3) - t^2 - 3 \\ \Leftrightarrow t^2 - 18t - 19 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)(t - 19) &= 0 \\ \therefore t &= -1, 19 \end{aligned}$$

である。

(2)

点 (X, Y) が、放物線①の上にあるとすると、

$$\begin{aligned} Y &= 3X^2 - 6tX - t^2 - 3 \\ \Leftrightarrow t^2 + 6tX + Y - 3X^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。この方程式を満たす実数 t が存在するための条件は、 t についての 2 次方程式の判別式が 0 以上であることだから、

$$\begin{aligned} (3X)^2 - (Y - 3X^2 + 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow Y &\leq 12X^2 - 3 \end{aligned}$$

の表す領域に点 (X, Y) は存在する。

(3)

放物線 $D: y = 12x^2 - 3$ と x 軸の共有点は

$$\begin{aligned} 12x^2 - 3 &= 0 \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

より、 $\left(\pm \frac{1}{2}, 0\right)$ である。このうち x 軸の正の部分に存在するのは $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ であるから、 $a = \frac{1}{2}$

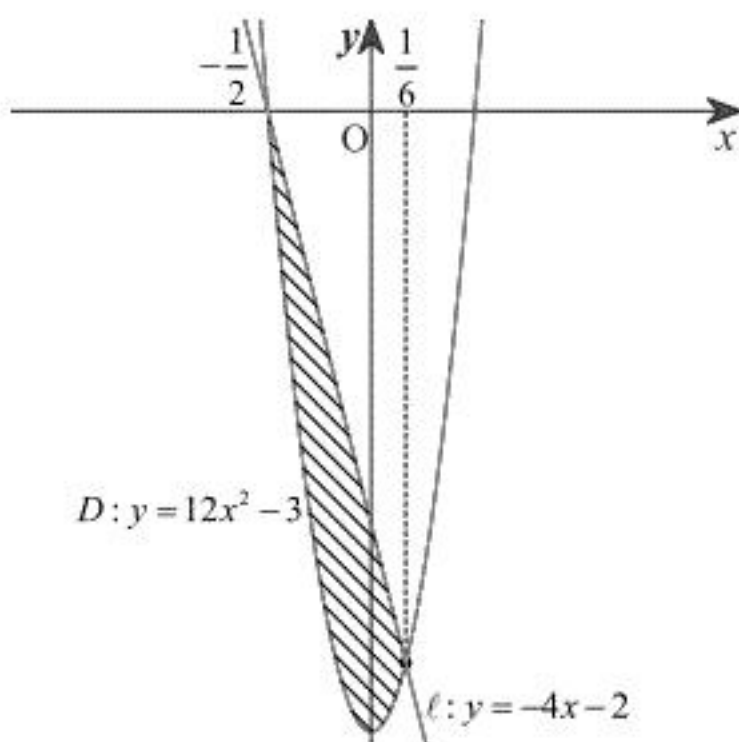
となる。 $f'(x) = -8x$ より、 $C: y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - (-4a^2 - 3) &= -8a(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= -8ax + 4a^2 - 3 \\ \Leftrightarrow y &= -4x - 2 \left(\because a = \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

である。よって、 D と ℓ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 12x^2 - 3 &= -4x - 2 \\ \Leftrightarrow 12x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(6x - 1) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。また、 D と ℓ で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{6}} \{(-4x - 2) - (12x^2 - 3)\} dx &= -12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{6}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{6}\right) dx \\ &= 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}^3 \\ &= \frac{16}{27} \end{aligned}$$

である。

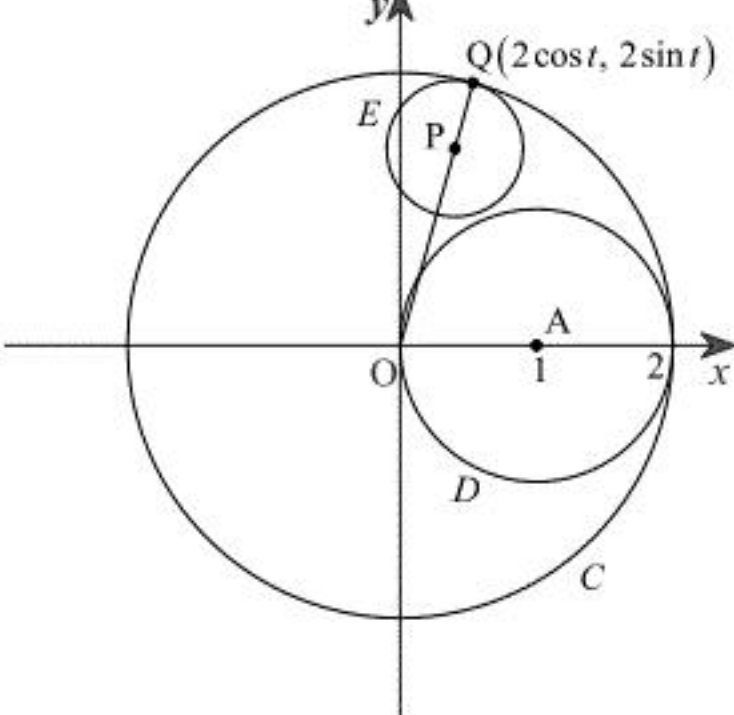
【Ⅵ】

【解答】

(1)	ア	イ							
	5	6							
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	1	8	7	3	7	4	4	3
	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	2	2	3	4	2	9	1	6	
(3)	ト								
	4								

【解説】

(1) 問題文の状況を図示すると以下のようになる。



点 O, P, Q はこの順に一直線上にあり、 $OQ = 2$, $PQ = r$ より $OP = 2 - r$ であるから、
 $P((2 - r)\cos t, (2 - r)\sin t)$ である。

(2) D と E が外接するとき、 E の半径と D の半径の和が PA の長さに等しい。よって

$$\begin{aligned} PA &= r + 1 \\ \Leftrightarrow PA^2 &= (r + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \{(2 - r)\cos t - 1\}^2 + \{(2 - r)\sin t\}^2 &= (r + 1)^2 \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \{(2 - r)\cos t - 1\}^2 + \{(2 - r)\sin t\}^2 &= (r + 1)^2 \\ \Leftrightarrow (2 - r)^2 - 2(2 - r)\cos t + 1 &= r^2 + 2r + 1 \\ \Leftrightarrow 2(3 - \cos t)r &= 4(1 - \cos t) \\ \therefore r &= \frac{2(1 - \cos t)}{3 - \cos t} \quad (\because 3 - \cos t \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。 $(X, Y) = ((2 - r)\cos t, (2 - r)\sin t)$ に $r = \frac{2(1 - \cos t)}{3 - \cos t}$ を代入して、

$$\begin{aligned} X &= \left\{ 2 - \frac{2(1 - \cos t)}{3 - \cos t} \right\} \cos t = \frac{4 \cos t}{3 - \cos t} \\ Y &= \left\{ 2 - \frac{2(1 - \cos t)}{3 - \cos t} \right\} \sin t = \frac{4 \sin t}{3 - \cos t} \end{aligned}$$

となる。 Y の導関数 $\frac{dY}{dt}$ は、

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4 \cos t (3 - \cos t) - 4 \sin t \sin t}{(3 - \cos t)^2} = \frac{4(3 \cos t - 1)}{(3 - \cos t)^2}$$

である。この分母は常に正であるから $\frac{dY}{dt} = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{3}$ であり、このような t は $0 < t < \pi$ にただ1つ存在する。これを t_0 とおくと、 Y の $0 < t < \pi$ における増減表は以下のようになる。

t	(0)	$\cdots$	t_0	$\cdots$	(π)
$\frac{dY}{dt}$		+	0	-	
Y		$\nearrow$		$\searrow$	

これより、 $t = t_0$ 、つまり $\cos t = \frac{1}{3}$ となる t において Y は最大となる。 $\sin t_0 > 0$ より

$$\begin{aligned} \sin t_0 &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ であるから、最大値は} \\ &\frac{4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。 $X = \frac{4 \cos t}{3 - \cos t}$ より、

$$\begin{aligned} X &= \frac{4 \cos t}{3 - \cos t} \\ \Leftrightarrow (3 - \cos t)X &= 4 \cos t \quad (\because 3 - \cos t \neq 0) \\ \Leftrightarrow (X + 4)\cos t &= 3X \\ \therefore \cos t &= \frac{3X}{X + 4} \quad (\because X \neq -4) \end{aligned}$$

である。これを $Y = \frac{4 \sin t}{3 - \cos t}$ に代入して、

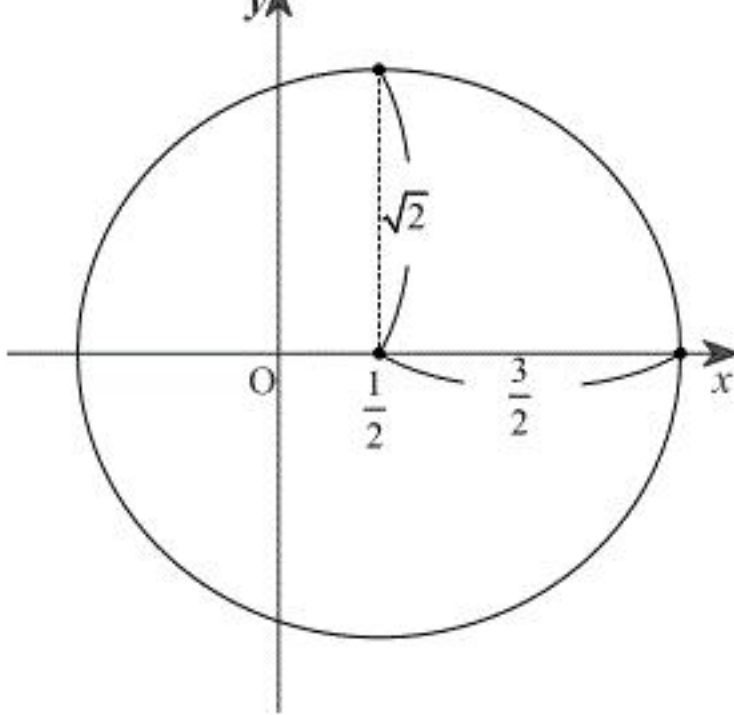
$$\begin{aligned} Y &= \frac{4 \sin t}{3 - \cos t} \\ \Leftrightarrow (3 - \cos t)Y &= 4 \sin t \quad (\because 3 - \cos t \neq 0) \\ \Leftrightarrow (3 - \cos t)^2 Y^2 &= 16 \sin^2 t \quad (\because (3 - \cos t)Y > 0, 4 \sin t > 0) \\ \Leftrightarrow \left\{ 3 - \left(\frac{3X}{X + 4} \right) \right\}^2 Y^2 &= 16 \left\{ 1 - \left(\frac{3X}{X + 4} \right)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{144}{(X + 4)^2} Y^2 &= 16 \cdot \frac{-8X^2 + 8X + 16}{(X + 4)^2} \\ \Leftrightarrow 144Y^2 &= 16(-8X^2 + 8X + 16) \quad (\because X \neq -4) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X^2 - X) + \frac{9}{16}Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{9}{16}y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{16}y^2 &= \frac{9}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 &= 1 \end{aligned}$$

であるから、この曲線は下図のような楕円を表す。



この楕円を x 軸の周りに1回転してできる立体は、中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円を x 軸の周りに

1回転してできた球を、球の中心から x 軸方向に $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 倍だけ相似拡大したものである。よって

求める体積は

$$\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 4\pi$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
3	3	2	3	2	5	5	1	0	3	－	1	2	5	2

〔解説〕

$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 1) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + n \\ &= n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{3}{2} n \end{aligned}$$

である。 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n は、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n 3k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{3}{2} n^2 + \frac{3}{2} n \end{aligned}$$

である。これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nT_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2n}}{1 + \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n^2}} = \frac{3}{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{S_k - T_k + 4n^3} &= \frac{k^2}{\left(k^3 + \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k\right) - \left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k\right) + 4n^3} \\ &= \frac{k^2}{k^3 + 4n^3} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 4} \end{aligned}$$

であるから、 $x_k = \frac{k}{n}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$ とおくと、 $\frac{k^2}{S_k - T_k + 4n^3} = \frac{1}{n} f(x_k)$ となる。区分求積法の考え方により、

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 4} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 4)'}{x^3 + 4} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\log(x^3 + 4) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \log \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。また

$$g(x) = \frac{x}{x^3 + 4} \quad (x > 0)$$

であるから

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^3 + 4) - x \cdot 3x^2}{(x^3 + 4)^2} = \frac{-2x^3 + 4}{(x^3 + 4)^2} \\ g''(x) &= \frac{-6x^2(x^3 + 4)^2 - (-2x^3 + 4) \cdot 2(x^3 + 4) \cdot 3x^2}{(x^3 + 4)^4} = \frac{6x^2(x^3 - 8)}{(x^3 + 4)^3} \end{aligned}$$

である。ゆえに、 $x > 0$ において、 $g'(x) = 0$ となる x は

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

より1個であり、 $g''(x) = 0$ となる x は

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

である。以上より、 $g(x)$ の $x > 0$ における増減表は以下のようになる。

x	(0)	…	$\sqrt[3]{2}$	…	2	…
$g'(x)$		+	0	－		－
$g''(x)$		－		－	0	+
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

したがって、 $0 < x < 2$ において、 $g(x)$ は増加したのち減少し、 C は上に凸である。 $2 < x$ において、 $g(x)$ はつねに減少し、 C は下に凸である。