

〔 1 〕

〔解答〕

(1)	ア	イ				
	1	2				
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	
	8	0	3	0	2	

〔解説〕

(1)

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + 2xy = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + 2xy = 5$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{5 - (x - y)^2}{2}$$

と変形できる。 $x - y = 1 + \sqrt{2}$ より,

$$\begin{aligned} xy &= \frac{5 - (1 + \sqrt{2})^2}{2} \\ &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) \\ &= 5^3 - 3(1 - \sqrt{2})^2 \cdot 5 \\ &= 125 - 15(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= 80 + 30\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	1	2	1	6
(2)	オ	カ	キ	ク
	7	2	1	6

〔解説〕

(1)

4つのさいころの目の出方の総数は、 6^4 (通り)であり、これらは同様に確からしい。このとき、25を素因数分解すると、

$$25 = 5^2$$

となることから、 $m = 25$ となるような目の組み合わせは $(1, 1, 5, 5)$ のみである。4つの目の出方が $(1, 1, 5, 5)$ となるような目の出方は、

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

より6通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$$

である。

(2)

300を素因数分解すると、

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

となる。したがって、 $m \leq 6^4 = 1296$ に注意すると、 m が300の倍数となるような目の組み合わせは、

$m = 300$ のとき、 $(2, 5, 5, 6), (3, 4, 5, 5)$

$m = 600$ のとき、 $(4, 5, 5, 6)$

$m = 900$ のとき、 $(5, 5, 6, 6)$

$m = 1200$ のとき、存在しない

である。したがって、 m が300の倍数となるような目の出方は、

$$\begin{aligned} \frac{4!}{2!} \cdot 2 + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} &= 24 + 12 + 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

より、42通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{42}{1296} = \frac{7}{216}$$

である。

〔3〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	3	7	4	
(2)	エ	オ	カ	キ
	1	9	1	0

〔解説〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項2、公差3の等差数列であるから、一般項 a_n は

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$$

と表せる。このとき、自然数 k に対して、第 k 群の最後の項は

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^k (2\ell-1) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k+1) - k \\ &= k^2 \end{aligned}$$

より、 k^2 番目の項である。したがって、第12群の4番目の項は、第11群の最後の項から4個後の項であるから、

$$11^2 + 4 = 125$$

より125番目の項である。したがって、

$$\begin{aligned} a_{125} &= 3 \cdot 125 - 1 \\ &= 374 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} a_n &> 1000 \\ \Leftrightarrow 3n-1 &> 1000 \\ \Leftrightarrow 3n &> 1001 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{1001}{3} = 333.6\cdots \end{aligned}$$

より、初めて1000より大きくなる項は334番目の項である。このとき、

$$324 = 18^2 < 334 < 19^2 = 361$$

より、334番目の項は第19群に含まれる。したがって、

$$334 - 324 = 10$$

であるから、初めて1000より大きくなる項は第19群のなかで10番目の項である。

〔4〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	4	8	5	9	6	2	5
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	9	5	1	9	6	2	5

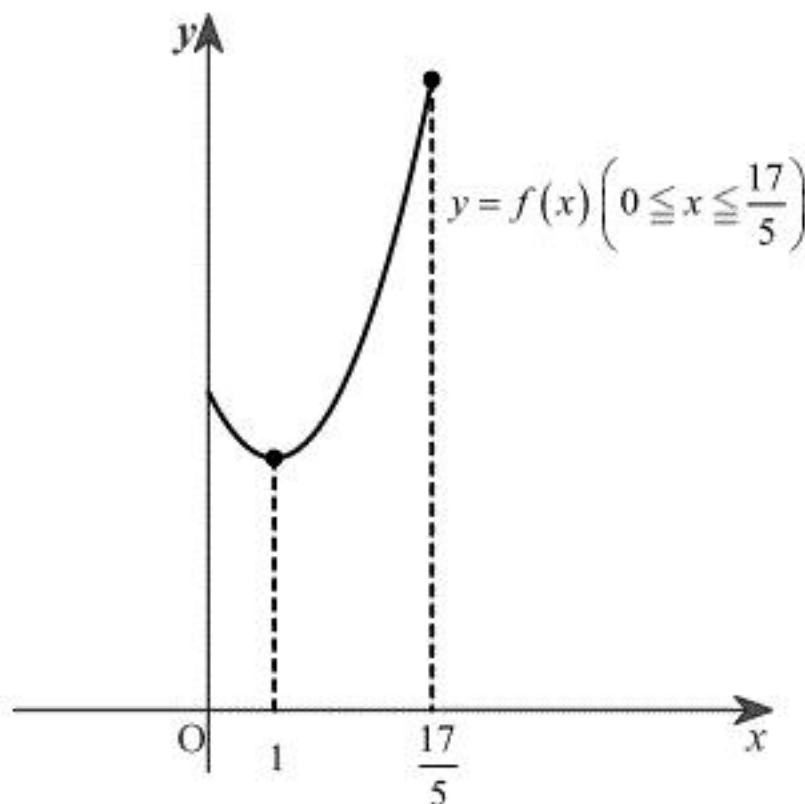
〔解説〕

(1)

$a = \frac{6}{5}$ のとき、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \left(10 \cdot \frac{6}{5} - 14\right)x + \left(\frac{6}{5} + 1\right)^2 \\ &= x^2 - 2x + \frac{121}{25} \\ &= (x-1)^2 + \frac{96}{25} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき、 $y = f(x) \left(0 \leq x \leq \frac{17}{5}\right)$ を図示すると、下図の通りである。



したがって、 $0 \leq x \leq \frac{17}{5}$ における最大値 M と最小値 m は、

$$x = \frac{17}{5} \text{ のとき、最大値 } M = f\left(\frac{17}{5}\right) = \frac{144}{25} + \frac{96}{25} = \frac{48}{5}$$

$$x = 1 \text{ のとき、最小値 } m = f(1) = \frac{96}{25}$$

となる。

(2)

$f(x)$ を整理すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \{x^2 - (14 - 10a)x\} + (a+1)^2 \\ &= \{x - (7 - 5a)\}^2 - 24a^2 + 72a - 48 \end{aligned}$$

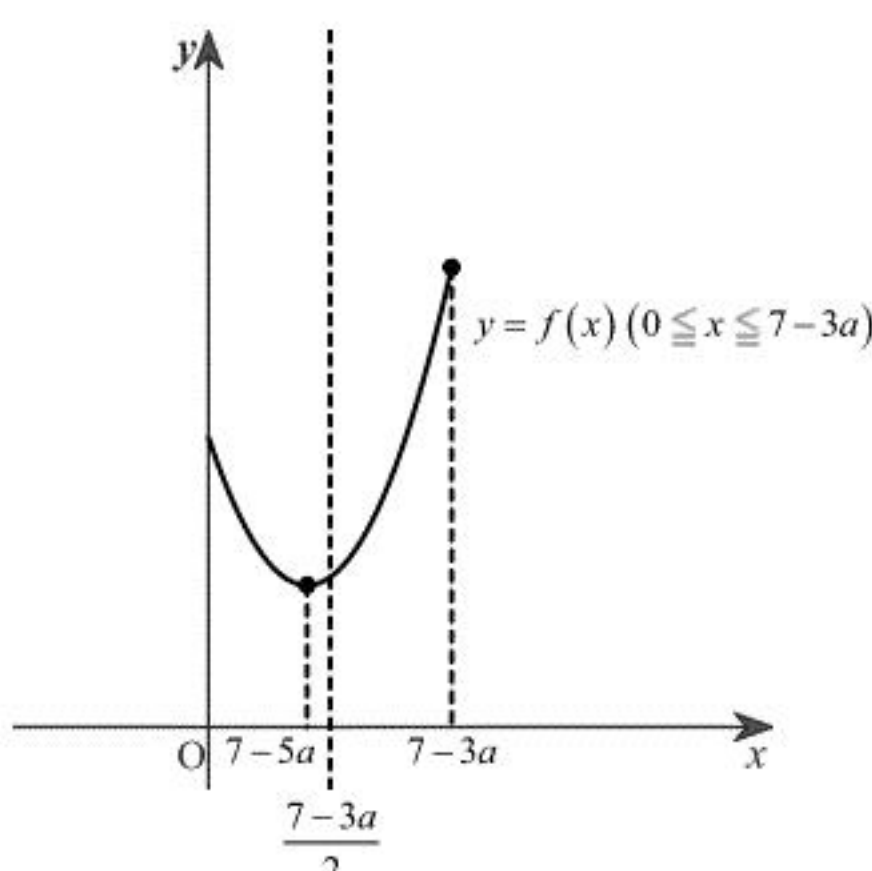
となる。ここで、区間の中央 $\frac{7-3a}{2}$ とグラフ $y = f(x)$ の軸 $7-5a$ の位置関係に注目すると、

$$\frac{7-3a}{2} - (7-5a) = \frac{7}{2}(a-1) \geq 0 \quad (\because 1 \leq a \leq 2)$$

より、 $7-5a \leq \frac{7-3a}{2}$ である。以下、軸 $7-5a$ が区間 $0 \leq x \leq 7-3a$ に含まれるかどうか注目して場合分けをする。

[1] $7-5a \geq 0$ 、すなわち $1 \leq a \leq \frac{7}{5}$ のとき

$y = f(x) \left(0 \leq x \leq 7-3a\right)$ を図示すると、下図の通りである。



したがって、 $0 \leq x \leq 7-3a$ における最大値 M と最小値 m は、

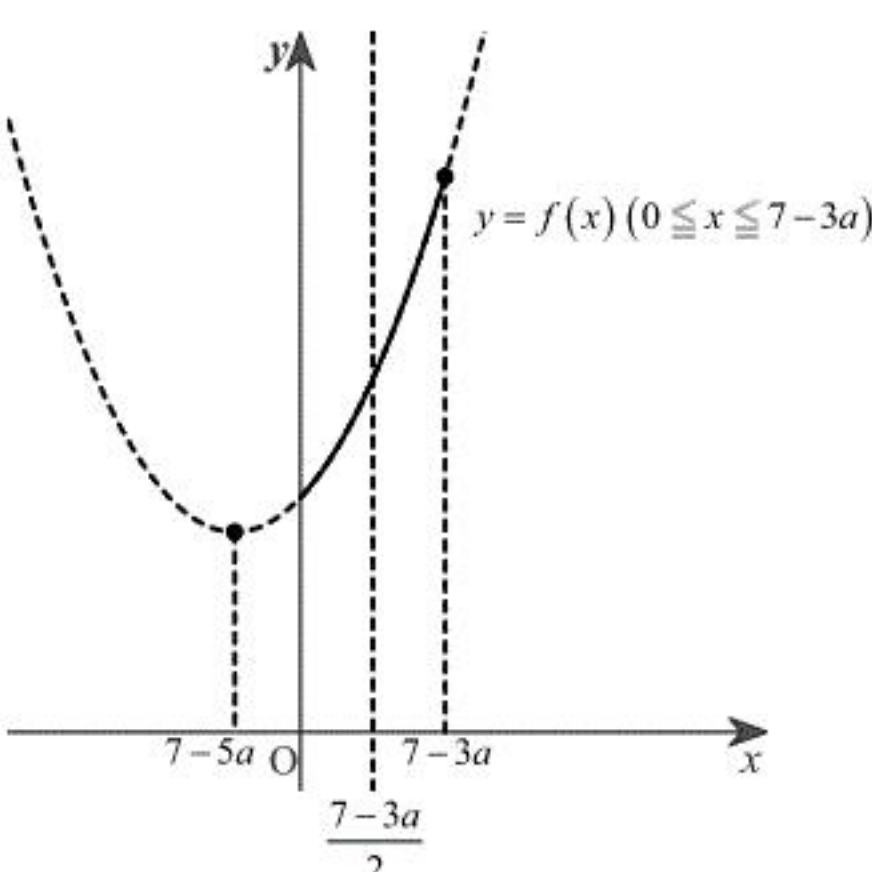
$$x = 7-3a \text{ のとき、最大値 } M = f(7-3a) = -20a^2 + 72a - 48$$

$$x = 7-5a \text{ のとき、最小値 } m = f(7-5a) = -24a^2 + 72a - 48$$

となる。

[2] $7-5a < 0$ 、すなわち $\frac{7}{5} < a \leq 2$ のとき

$y = f(x) \left(0 \leq x \leq 7-3a\right)$ を図示すると、下図の通りである。



したがって、 $0 \leq x \leq 7-3a$ における最大値 M と最小値 m は、

$$x = 7-3a \text{ のとき、最大値 } M = f(7-3a) = -20a^2 + 72a - 48$$

$$x = 7-5a \text{ のとき、最小値 } m = f(0) = (a+1)^2$$

となる。

以上、[1], [2]より、 $f(x) \left(0 \leq x \leq 7-3a\right)$ の最大値 M は $M = -20a^2 + 72a - 48$ であるから、 M の値が最も大きくなるのは、

$$\begin{aligned} M &= -20a^2 + 72a - 48 \\ &= -20\left(a^2 - \frac{18}{5}a\right) - 48 \\ &= -20\left(a - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{84}{5} \end{aligned}$$

より、 $1 \leq a \leq 2$ に注意して、 $a = \frac{9}{5}$ のときである。このとき、最小値 m は[2]より、

$$f(0) = \left(\frac{9}{5} + 1\right)^2 = \frac{196}{25}$$

である。

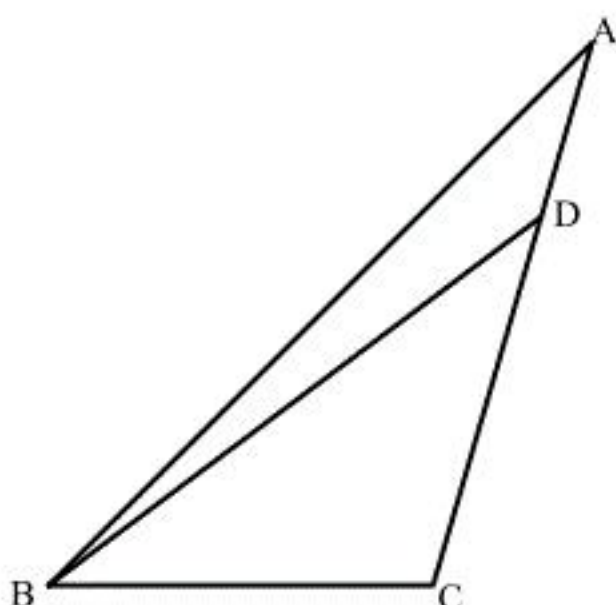
〔5〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ			
	2	1	0			
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	7	4	2	1	5	0

〔解説〕

(1)



$\angle BDC = \frac{\pi}{4} + \angle ABD$ であり、 $0 < \angle ABD < \pi$ を満たすため、 $\sin \angle ABD > 0$ である。したがって、加法定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle BDC &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \angle ABD \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \angle ABD - \sin \frac{\pi}{4} \sin \angle ABD \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

である。

(2)

$BC = DC$ より三角形 BCD は二等辺三角形であるから、 $\angle DBC = \angle BDC$ である。したがって、 $0 < \angle BDC < \pi$ より $\sin \angle BDC > 0$ に注意して、

$$\begin{aligned}\sin \angle BCD &= \sin (\pi - 2\angle BDC) \\ &= \sin (2\angle BDC) \\ &= 2 \sin \angle BDC \cdot \cos \angle BDC \\ &= 2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \\ &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

である。したがって、三角形 BCD の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} BC \cdot DC \cdot \sin \angle BCD &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{25} \\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

である。また、

$$BD = 2BC \cos \angle DBC = 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = 1$$

より、三角形 ABD において正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{BD}{\sin \angle BAC} &= \frac{AD}{\sin \angle ABD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{AD}{\frac{3}{5}} \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{3\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$

である。したがって、三角形 ABD と三角形 BCD はともに点 B から辺 AC におろした垂線の長さを高さとする三角形であるから、三角形 ABD の面積は

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{2}}{5}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{21}{50}$$

である。

〔6〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ		
	1	2	5	1	6	1	2	3	1	6		
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	3	2	2	7	1	6	2	1	8	7	6	4

〔解説〕

(1) $a = \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + \frac{3}{4} \\ &= -3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ のとき、極小値

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} \\ &= -\frac{5}{16} \end{aligned}$$

をとり、 $x = \frac{1}{2}$ のとき、極大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

である。以上より、 $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{16}\right)$ 、 $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}\right)$ である。

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 3a^2 \\ &= -3(x^2 - a^2) \\ &= -3(x - a)(x + a) \end{aligned}$$

であるから、 $a > 0$ に注意すると、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$-a$	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$f(-a)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x = -a$ のとき、極小値 $f(-a)$ を、 $x = a$ のとき、極大値 $f(a)$ をとり、

$$\begin{aligned} f(-a) &= -a^4 - 2a^3 \\ f(a) &= -a^4 + 2a^3 \end{aligned}$$

となる。よって、 $(x_0, y_0) = (-a, -a^4 - 2a^3)$ 、 $(x_1, y_1) = (a, -a^4 + 2a^3)$ である。このとき、

$g(a) = -a^4 + 2a^3$ とすると、

$$\begin{aligned} g'(a) &= -4a^3 + 6a^2 \\ &= -2a^2(2a - 3) \end{aligned}$$

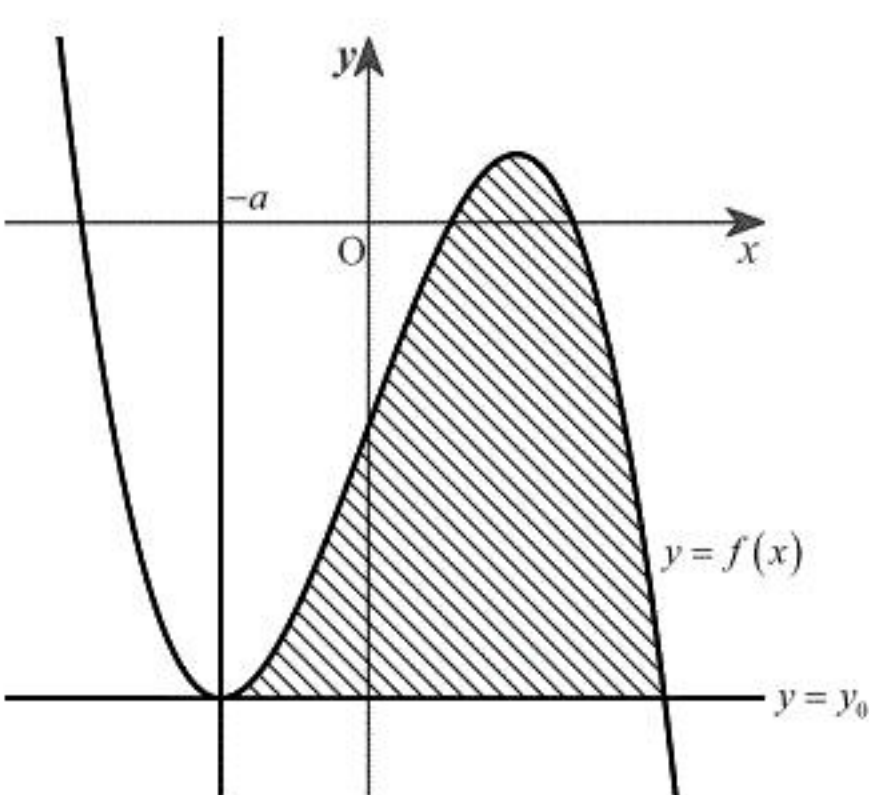
であるから、 $a > 0$ における $g(a)$ の増減表は以下の通りである。

a	0	...	$\frac{3}{2}$	...
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		$\nearrow$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$

したがって、 $y_1 = g(a)$ の値が最も大きくなるのは $a = \frac{3}{2}$ のときであり、このとき、

$$\begin{aligned} y_1 &= f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{16} \\ y_0 &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{189}{16} \end{aligned}$$

となる。また、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = y_0$ で囲まれる部分の面積は、下図における斜線部である。



ここで、 $a = \frac{3}{2}$ のとき $f(x) = -x^3 + \frac{27}{4}x - \frac{81}{16}$ 、 $y_0 = -\frac{189}{16}$ である。このとき、

$y = -x^3 + \frac{27}{4}x - \frac{81}{16}$ 、 $y = -\frac{189}{16}$ の共有点の x 座標を考えると、

$$\begin{aligned} -x^3 + \frac{27}{4}x - \frac{81}{16} &= -\frac{189}{16} \\ \Leftrightarrow x^3 - \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 27x + 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{3}{2}, 3 \end{aligned}$$

である。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}}^3 \left\{ -x^3 + \frac{27}{4}x - \frac{81}{16} - \left(-\frac{189}{16}\right) \right\} dx &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 \left\{ -x^3 + \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{27}{8}x^2 + \frac{27}{4}x \right]_{-\frac{3}{2}}^3 \\ &= \left(-\frac{81}{4} + \frac{243}{8} + \frac{81}{4} \right) - \left\{ -\frac{1}{4} \cdot \frac{81}{16} + \frac{27}{8} \cdot \frac{9}{4} + \frac{27}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{243}{8} - \left(-\frac{81}{64} + \frac{243}{32} - \frac{81}{8} \right) \\ &= \frac{2187}{64} \end{aligned}$$

である。