

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
3	5	3	2	－	4	3	2	3	2	
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
6	7	7	3	6	7	2	6	9	3	6

〔解説〕

以下、点Xの座標がkであることを、 $X(k)$ と表記する。このとき、 $C(a_2)$ は2点A(1), B(4)に対して線分ABを2:1に内分する点であるから、

$$a_2 = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{3} = 3$$

である。同様に、 $D(b_2)$ は2点C(3), B(4)に対して線分CBを2:1に外分する点であるから、

$$b_2 = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{2 - 1} = 5$$

である。 $n \geq 1$ において、 $C(a_{n+1})$ は2点A(a_n), B(b_n)に対して線分ABを2:1に内分する点であるから、

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot b_n + 1 \cdot a_n}{3} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

である。同様に、 $D(b_{n+1})$ は2点C(a_{n+1}), B(b_n)に対して線分CBを2:1に外分する点であるから、

$$b_{n+1} = \frac{2 \cdot b_n - 1 \cdot a_{n+1}}{2 - 1} = -a_{n+1} + 2b_n = \frac{1}{3}(-a_n + 4b_n) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

である。数列 $\{c_n\}$ を $c_n = -a_n + b_n$ で定める。このとき、②－①より、

$$\begin{aligned} -a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{2}{3}(-a_n + b_n) \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= \frac{2}{3}c_n \end{aligned}$$

が得られる。ゆえに、数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = 3$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、

$$c_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow -a_n + b_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} \quad \cdots \cdots \text{③}$$

である。また、①－② $\times 2$ より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2b_{n+1} &= a_n - 2b_n \\ \therefore a_n - 2b_n &= a_1 - 2b_1 = -7 \quad \cdots \cdots \text{④} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、③＋④より、

$$-b_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} - 7 \Leftrightarrow b_n = 7 - \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}$$

であり、③より

$$a_n = b_n - \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = \left(7 - \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}\right) - \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = 7 - \frac{2^n}{3^{n-2}}$$

である。さらに、数列 $\{c_n\}$ が初項 $c_1 = 3$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であることより、

$$\sum_{k=1}^n c_k = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 9 - \frac{2^n}{3^{n-2}}$$

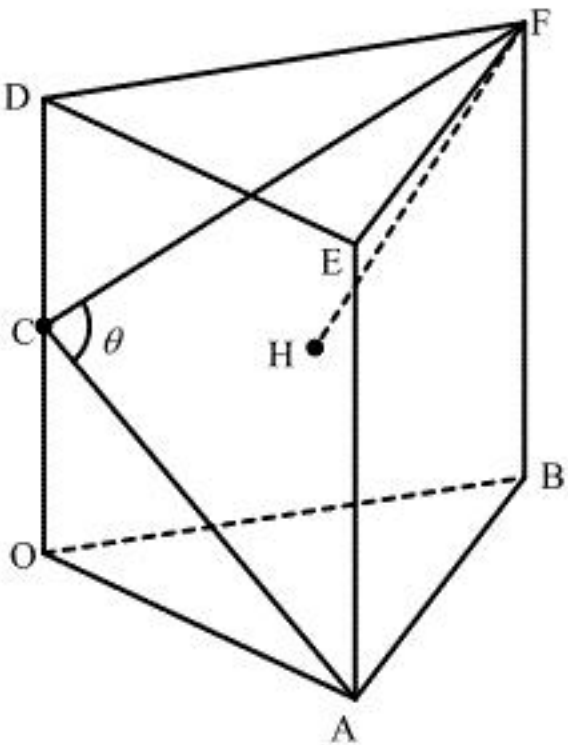
となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	5	－	1	4	1	5	4	1	2	2	1
ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
6	2	3	3	2	1	1	5	4	3	0	5

〔解説〕



点Cは辺ODの中点であるから、 $OC=CD=1$ である。 $\triangle OAC$, $\triangle DFC$ は直角二等辺三角形であるから、三平方の定理より、

$$CA=CF=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

である。また、

$$AF=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$$

である。このとき、 $\triangle ACF$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} AF^2 &= AC^2 + CF^2 - 2AC \cdot CF \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow 5 &= 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

が得られる。このとき、 $0 < \theta < \pi$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

である。ゆえに、 $\triangle AFC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

である。また、 $\triangle OAB$ は正三角形であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。ここで、 $\overrightarrow{CH} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CF}$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EC} &= x(\vec{a} - \vec{c}) + y(\vec{b} + \vec{c}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EH} &= (-\vec{a} - \vec{c}) + x(\vec{a} - \vec{c}) + y(\vec{b} + \vec{c}) \\ \therefore \overrightarrow{EH} &= (x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (-x+y-1)\vec{c} \end{aligned}$$

となる。 $\triangle OAB$ とOD, AE, BFが垂直であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CA} &= \{(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (-x+y-1)\vec{c}\} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) \\ &= (x-1) + \frac{1}{2}y - (-x+y-1) \\ &= 2x - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CF} &= \{(x-1)\vec{a} + y\vec{b} + (-x+y-1)\vec{c}\} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(x-1) + y + (-x+y-1) \\ &= -\frac{1}{2}x + 2y - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、EHと α が垂直であるとき、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + 2y - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{5}(\vec{a} - \vec{c}) + \frac{4}{5}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

であるから、 $|\overrightarrow{CH}| \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}| &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{16}{25} + \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{6}{5}} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{5} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ									
	1	4	3									
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	
	1	3	6	5	3	6	2	5	3	6	1	
	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	
	2	5	2	1	6	1	3	1	8	9	1	

【解説】

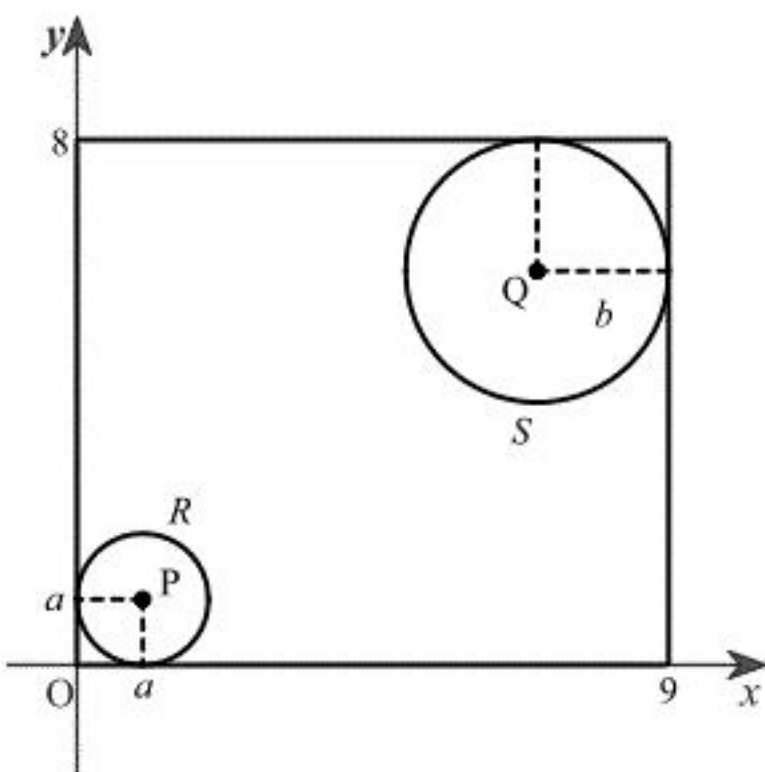
- (1)(i)
- $$(a-b)(b-c)=0 \Leftrightarrow a=b \text{ または } b=c \quad \cdots \textcircled{1}$$
- である。したがって、 $(a-b)(b-c)=0$ であることは、 $a=b$ かつ $b=c$ であることの必要条件であるが、十分条件ではない。
- (ii)
- ①より、 $a \neq b$ かつ $b \neq c$ であることは、 $(a-b)(b-c)=0$ であることの必要条件でも十分条件でもない。
- (iii)
- ①より、 $(a-b)(b-c)=0$ であることは、 $a=b$ または $b=c$ であることの必要十分条件である。
- (2)(i)
- サイコロを n 回投げたときの目の出方は 6^n 通りであり、これらは同様に確からしい。このとき、 $a_1=3, a_2=5$ となるのは1回目に3、2回目に5が出るときであるから、求める確率は、
- $$\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$
- である。
- (ii)
- $-6 \leq a_1 - a_2 - 1 \leq 4$ であるから、このうち $a_1 - a_2 - 1$ が素数となるのは、2, 3である。よって、 $a_1 - a_2 - 1 = 2$ となるのは、 $(a_1, a_2) = (4, 1), (5, 2), (6, 3)$ の3組が
 $a_1 - a_2 - 1 = 3$ となるのは、 $(a_1, a_2) = (5, 1), (6, 2)$ の2組
であるから、合計で5組である。したがって、求める確率は、
- $$\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$
- である。
- (iii)
- サイコロを3回投げたとき、 $a_1 \neq a_2$ となるような (a_1, a_2) の組は、
 ${}_6P_2 = 30$ (通り)
である。さらに、これらのそれぞれに対して、 $a_2 \neq a_3$ となるような a_3 の選び方は5通り存在する。したがって、求める確率は、
- $$\frac{30 \cdot 5}{6^3} = \frac{25}{36}$$
- である。
- (iv)
- 「 $a_1 < a_2$ 、または $a_2 > a_3$ となる」事象の余事象は、
「 $a_1 \geq a_2$ 、かつ $a_2 \leq a_3$ となる」 $\cdots \textcircled{1}$
事象である。以下、サイコロを3回振ったときの目の数字の重複に注目して場合分けをする。
- [1] サイコロの目が3種類の場合
出てくる数の組み合わせはすべてで
 ${}_6C_3 = 20$ (通り)
である。出た目の数字の組み合わせのうち、最も小さい数字を a_2 としたときに①を満たす。したがって、残る a_1, a_3 を考えると、
 $20 \cdot 2 = 40$ (通り)
である。
- [2] サイコロの目が2種類の場合
出てくる数の組み合わせはすべてで
 ${}_6C_2 = 15$ (通り)
である。出た目の数字の組み合わせのうち、小さい方の数字を a_2 としたときに①を満たす。したがって、残る a_1, a_3 を考えると、すべて a_2 と同じ数字となる場合のみ1種類となるから、
 $15 \cdot (2^2 - 1) = 45$ (通り)
である。
- [3] サイコロの目が1種類の場合
出てくる数の組み合わせは6通りであり、常に①を満たす。
- 以上、[1], [2], [3]より、①を満たす確率は、
- $$\frac{40 + 45 + 6}{6^3} = \frac{91}{216}$$
- である。したがって、求める確率は、
- $$1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$$
- である。
- (v)
- サイコロを3回投げたとき、 $a_2 \leq a_3$ となるような (a_2, a_3) の組は、
 $a_2 = a_3$ となるのは、6(通り)
 $a_2 < a_3$ となるのは、 ${}_6C_2 = 15$ (通り)
より、21通りである。よって、 $a_2 \leq a_3$ となるような (a_1, a_2, a_3) の組は、126通りである。このとき $a_1 \geq a_2$ かつ $a_2 \leq a_3$ となるような a_1, a_3 の選び方は $a_2 = k$ のとき、 $(7-k)^2$ (通り)存在する。したがって、求める確率は、
- $$\frac{\sum_{k=1}^6 (7-k)^2}{126} = \frac{6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1}{126} = \frac{13}{18}$$
- である。
- (vi)
- $$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_4) = 0$$
- $$\Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ または } a_2 = a_3 \text{ または } a_3 = a_4$$
- であるから、このとき、 $k=1, 2, 3$ に対して $a_k = a_{k+1}$ となるような (a_k, a_{k+1}) の組は6通りであるから、 (a_1, a_2, a_3, a_4) の組は216通りずつ存在する。また、 $a_1 = a_2$ かつ $a_3 = a_4$ 、 $a_1 = a_2 = a_3$ 、 $a_2 = a_3 = a_4$ となるような (a_1, a_2, a_3, a_4) の組は、36通りずつ存在する。さらに、 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ となるような (a_1, a_2, a_3, a_4) の組は、6通り存在する。したがって、求める確率は、
- $$\frac{216 \cdot 3 - 36 \cdot 3 + 6}{6^4} = \frac{546}{1296} = \frac{91}{216}$$
- である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

	ア								
	4								
(1)	イ	ウ	エ	オ					
	1	1	4	5					
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	5	1	7	5	4	3	2	4	

〔解説〕

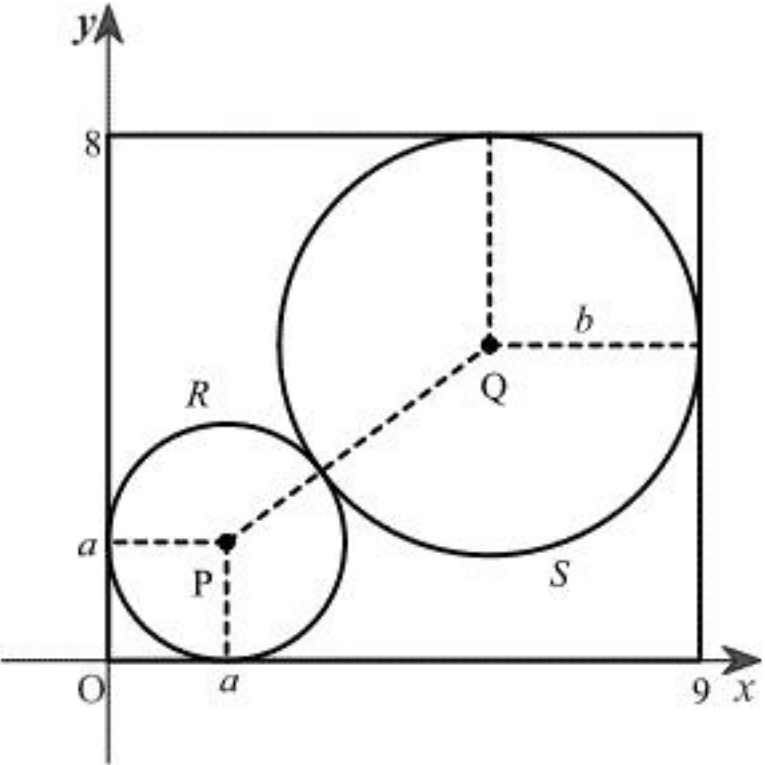


R が直線 $y=8$ に接するとき、 R の直径が 8 となる。したがって、 $a=4$ である。

(1)

R, S の半径はそれぞれ a, b であるから、 P, Q の座標はそれぞれ $P(a, a), Q(9-b, 8-b)$ である。

(2)



円 R, S は D に含まれるから、半径に注目して、 $0 < a \leq 4, 0 < b \leq 4$ である。ゆえに、 $a+b$ の取りうる値の範囲は、 $0 < a+b \leq 8$ である。円 R, S が外接するとき、中心間の距離は半径の和に一致するから、

$$\begin{aligned} (9-b-a)^2 + (8-b-a)^2 &= (a+b)^2 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 - 34(a+b) + 145 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(a+b)-5\} \{(a+b)-29\} &= 0 \\ \therefore a+b &= 5 \quad (\because 0 < a+b \leq 8) \end{aligned}$$

である。このとき、 $0 < b \leq 4$ より、

$$\begin{aligned} 5-a &\leq 4 \\ \Leftrightarrow a &\geq 1 \end{aligned}$$

が得られ、同様にして b も考えることにより、 $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$ である。このとき、円 R, S の面積の和は、

$$\begin{aligned} \pi a^2 + \pi b^2 &= \pi a^2 + \pi (5-a)^2 \quad (\because a+b=5) \\ &= \pi (2a^2 - 10a + 25) \\ &= 2\pi \left(a - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{2} \pi \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに、 $1 \leq a \leq 4$ より、円 R, S の面積の和は

$$\begin{aligned} a=1, 4 \text{ のとき、最大値 } \pi + 4^2 \pi &= 17\pi \\ a=\frac{5}{2} \text{ のとき、最小値 } \frac{25}{2} \pi & \end{aligned}$$

をとる。また、円 R と S の共有点を $C(x, y)$ とすると、 C は線分 PQ を $a:b$ に内分する点である。したがって、

$$\begin{aligned} x &= \frac{ba+a(9-b)}{a+b} = \frac{9}{5}a \\ y &= \frac{ba+a(8-b)}{a+b} = \frac{8}{5}a \end{aligned}$$

より、 $C\left(\frac{9}{5}a, \frac{8}{5}a\right)$ である。ゆえに、直線 PQ の傾きは

$$\frac{(8-b)-a}{(9-b)-a} = \frac{3}{4}$$

であるから、 C を通り直線 PQ に直交する直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{8}{5}a &= -\frac{4}{3} \left(x - \frac{9}{5}a \right) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{4}{3}x + 4a \end{aligned}$$

と求まる。

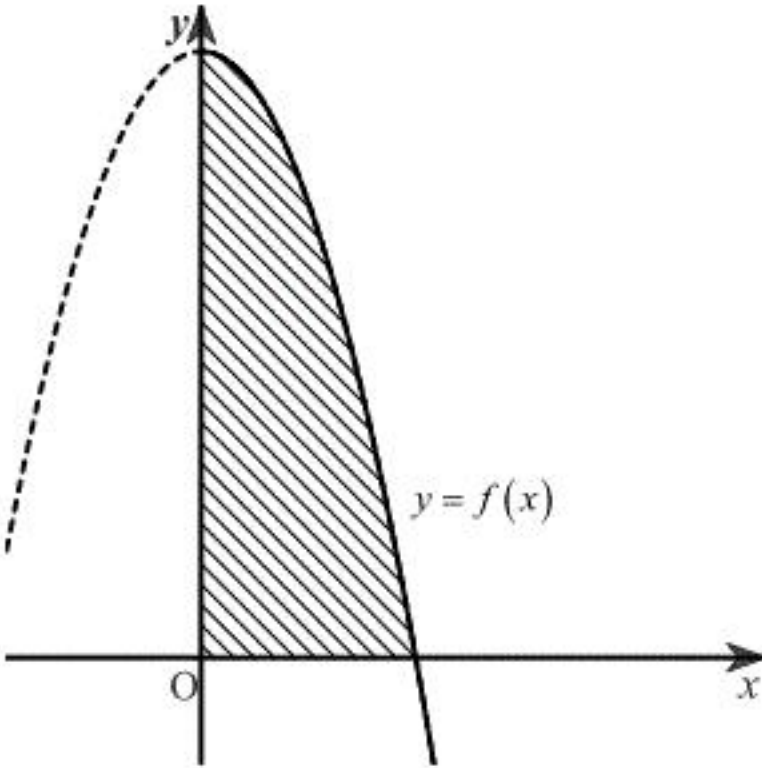
〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
	4	1	6	8	8	3	1	8	5	7	
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	2	4	2	3	1	0	1	0	5	6	4

〔解説〕

(1)



C と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} a-bx^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{a}{b} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{ab}}{b} \quad (\because x \geq 0, a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

となる。 C は点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ を通るから、

$$\frac{1}{2} = a - \frac{1}{16}b \Leftrightarrow 16a = b + 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また、 C と x 軸および y 軸とで囲まれた部分の面積は、上図における斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{ab}}{b}} (a-bx^2) dx &= \left[ax - \frac{1}{3}bx^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{ab}}{b}} \\ &= \frac{a\sqrt{ab}}{b} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{b} \\ &= \frac{2a\sqrt{ab}}{3b} \end{aligned}$$

と表せる。これが $\frac{\sqrt{2}}{6}$ となるため、 $\frac{2a\sqrt{ab}}{3b} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ である。両辺負でないから2乗して、

$$\frac{4a^3b}{9b^2} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow 8a^3 = b \quad (\because b > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②より、

$$\begin{aligned} 8a^3 &= 16a - 8 \\ \Leftrightarrow a^3 - 2a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a^2 + a - 1) &= 0 \\ \therefore a &= 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。ただし、 $2 < \sqrt{5} < 3$ より、 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ である。したがって、①より、

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ のとき、} b = 8 \\ a &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき、} b = 8(-1+\sqrt{5}) - 8 = 8\sqrt{5} - 16 \end{aligned}$$

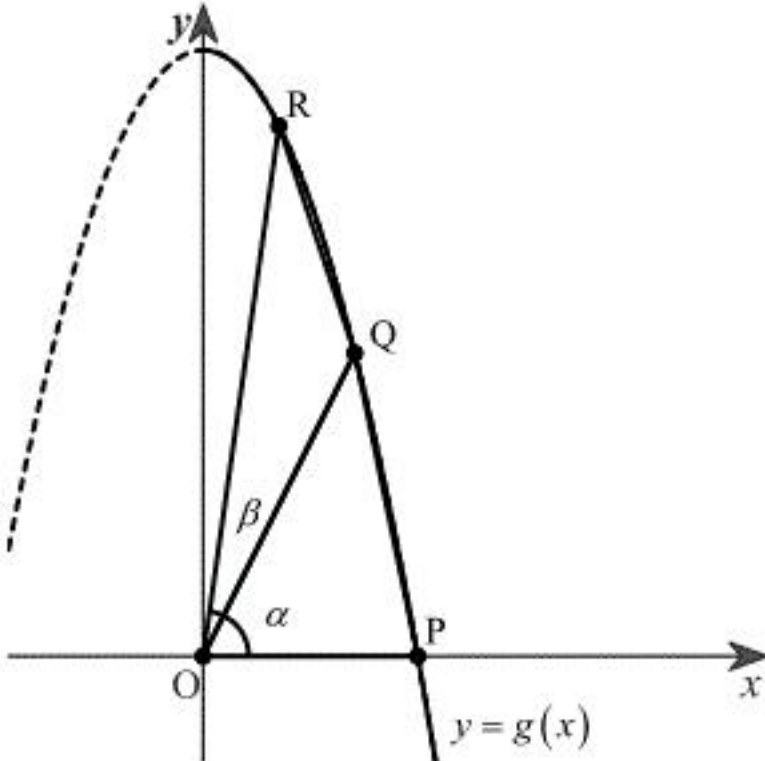
となる。

(2)

$g(x) = 1 - 8x^2$ ($x \geq 0$) とする。このとき、 $y = g(x)$ ($x \geq 0$) と x 軸の交点 P の x 座標は、(1)において $(a, b) = (1, 8)$ を代入して、

$$\frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。ゆえに、 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ である。



$Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), R\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$ より、直線 OQ, OR の傾きはそれぞれ2,7である。ゆえに、直線と x 軸の正の向きがなす角を θ としたとき、直線の傾きと $\tan \theta$ は一致するから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan (\alpha + \beta) = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \frac{2 + \tan \beta}{1 - 2 \tan \beta} = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \beta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

である。以上より、 $\triangle ROQ$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OR \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \\ &= \frac{5}{64} \end{aligned}$$

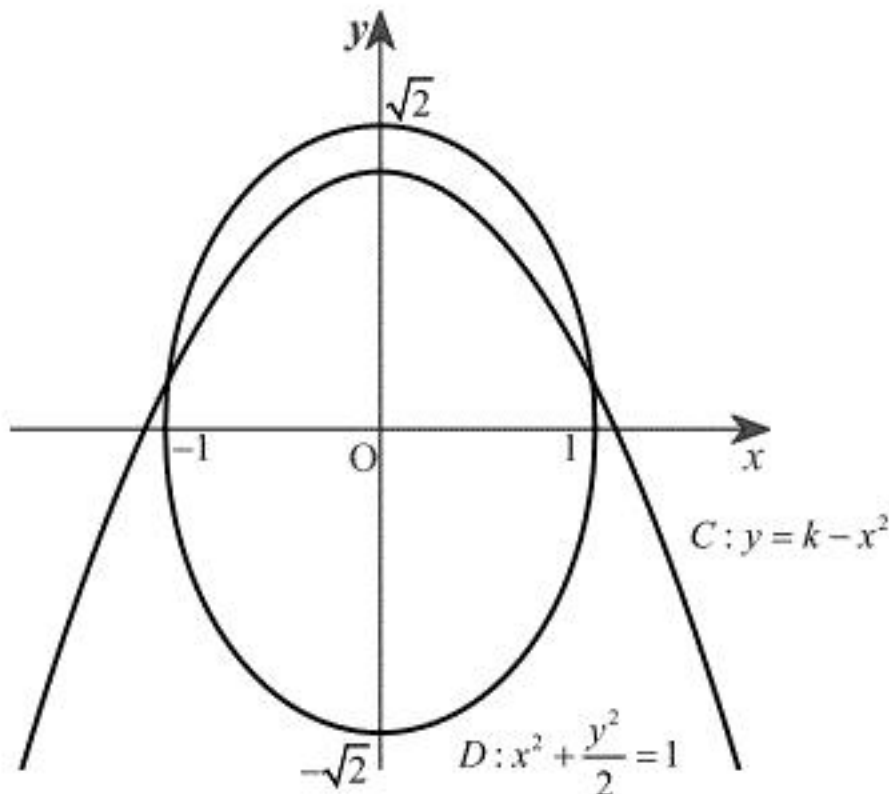
と求まる。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
2	7	2	2	8	4	5	2	7	5	4	7	3

〔解説〕



C, D はともに y 軸に関して対称な図形である。したがって、 C と D が

点 P を共有するとき、 P を y 軸に関して対称移動した点も共有する・・・①

ことがわかる。 C と D の共有点がちょうど3つであるとき、①より C と D は y 軸上の共有点を有する。したがって、 $k = \pm\sqrt{2}$ であるが、 $k = -\sqrt{2}$ のとき、 C が上に凸であることから、共有点を3つ持つことはない。ゆえに、 $k = \sqrt{2}$ である。 $k = \sqrt{2}$ のとき、 C と D の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{(\sqrt{2} - x^2)^2}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^4 - 2(\sqrt{2} - 1)x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 \{x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 = 0, 2(\sqrt{2} - 1) \\ \therefore x = 0, \pm\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} \quad (\because \sqrt{2} - 1 > 0)\end{aligned}$$

となるから、確かに共有点を3つ持ち、適する。同様にして考えると、 C と D の共有点がちょうど1つであるとき、 $k = -\sqrt{2}$ である。したがって、図より、 $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ のとき、 C と D の共有点は、ちょうど2つである。 $k > \sqrt{2}$ のとき、 C と D の方程式を連立すると、

$$x^2 + \frac{(k - x^2)^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2(k - 1)x^2 + (k^2 - 2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この x^2 についての2次方程式は、 $x^2 \geq 0$ なる解を持つとき、 x は共有点の x 座標を表す。ゆえに、 C と D の共有点がちょうど2つである条件は、①が $x^2 \geq 0$ なる解をただ1つ持つときである。①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k - 1)^2 - (k^2 - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2k + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

であり、このとき①は、

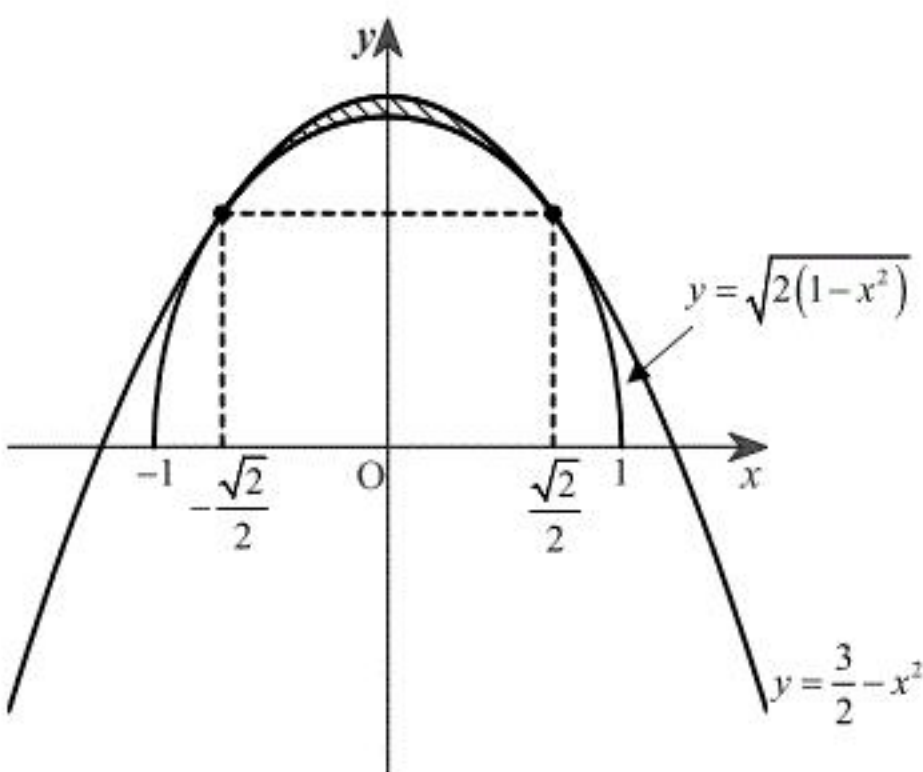
$$\begin{aligned}x^4 - x^2 + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x^2 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから、適する。したがって、 $\sqrt{2} < k < \frac{3}{2}$ のとき、 C と D の共有点はちょうど4つである。

$k = \frac{3}{2}$ のとき、 $y = \frac{3}{2} - x^2$ と D の共有点のうち、 $x \geq 0$ の範囲にある共有点の x 座標は、

$x^2 = \frac{1}{2}$ より、 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。このとき、 $y = \frac{3}{2} - x^2$ 、および $y = \sqrt{2(1 - x^2)}$ で囲まれる部分は、

$y = \sqrt{2(1 - x^2)}$ が D の $y \geq 0$ の部分であることに注意すると、下図における斜線部である。



したがって、斜線部の面積を S とすると、 S は y 軸に関する対称性より、

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) - \sqrt{2(1 - x^2)} \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\sqrt{2(1 - x^2)} - x^2 + \frac{3}{2} \right) dx\end{aligned}$$

と表せる。ここで、不定積分 $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ について、 $x = \cos t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、

$$dx = -\sin t dt$$

であるから、 K を積分定数として、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \sqrt{\sin^2 t} \cdot (-\sin t) dt \\ &= -\int \sin^2 t dt \quad \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{\sin 2t - 2t}{4} + K\end{aligned}$$

である。以上より、 S において、 $x = \cos t$ とすると、 x と t の対応関係は以下の通りとなる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、 S を計算すると、

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-x^2 + \frac{3}{2} \right) dx - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{2} \left[\frac{\sin 2t - 2t}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - (0 - \pi) \right\} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\end{aligned}$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ				
	2	3	1	1	1	0				
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	
	3	3	2	5	1	4	3	1	2	
(3)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ			
	8	9	8	6	3	3	6			

〔解説〕

(1)

$n\geq 3$ において、 $(1+x)^n$ の展開式における x^i ($1\leq i\leq n$)の係数を a_i とすると、

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^nC_ix^i\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

と表せるから、 $a_i={}_nC_i$ である。したがって、

$$\begin{aligned}a_1&={}_nC_1=n\\a_2&={}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}\\a_n&={}_nC_n=1\end{aligned}$$

である。①において、 $x=1$ とすると、 $1\leq i\leq n$ なる i に対して、二項係数の定義より $a_i>0$ が成り立つから、

$$\begin{aligned}(1+1)^n&=\sum_{i=0}^na_i\\&>a_2\\&=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $e^n>2^n$ より、

$$e^n>\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow\frac{n}{e^n}<\frac{2}{n-1}$$

であるから、

$$0<\frac{n}{e^n}<\frac{2}{n-1}$$

が成り立つ。したがって、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{2}{n-1}=0$$

より、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{e^n}=0$$

である。

(2)

$f(x)=-\sqrt{x}\log x$ ($x>0$)とする。このとき、

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\log x+2)\\f''(x)&=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}(\log x+2)-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x\end{aligned}$$

である。 $x>0$ のとき、

$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\&\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\log x+2)=0\\&\Leftrightarrow\log x+2=0\ (\because x>0)\\&\Leftrightarrow x=e^{-2}\\f''(x)&=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x=0\\&\Leftrightarrow\log x=0\ (\because x>0)\\&\Leftrightarrow x=1\end{aligned}$$

である。ゆえに、 $f(x)$ の増減表は下表の通りである。

x	0	...	e^{-2}	...	1	...
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e^{-2})$	$\searrow$	$f(1)$	$\searrow$

したがって、 $x=e^{-2}$ のとき、 $f(x)$ は最大値

$$f(e^{-2})=-\left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\log e^{-2}=2e^{-1}$$

をとる。また、 $\alpha=e^{-2}$ 、 $\beta=1$ であるから、

$0<x<\alpha$ において、 $f(x)$ はつねに増加し、 C は上に凸である。

$\alpha<x<\beta$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は上に凸である。

$\beta<x$ において、 $f(x)$ はつねに減少し、 C は下に凸である。

とわかる。

(3)

不定積分 $\int\sqrt{x}\log xdx$ は、積分定数を K とすると、

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\log xdx&=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\log xdx\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-1}dx\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\log x-\frac{2}{3}\right)+K\end{aligned}$$

と計算できる。また、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\int_{e^{-2n}}^1\sqrt{x}\log xdx$$

で定める。このとき、

$$\begin{aligned}b_n&=-\int_{e^{-2n}}^1\sqrt{x}\log xdx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\log x-\frac{2}{3}\right)\right]_{e^{-2n}}^1\\&=\frac{4}{9}-\left\{-\frac{2}{3}\left(e^{-2n}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(-2n-\frac{2}{3}\right)\right\}\\&=\frac{4}{9}\left(1-\frac{3n+1}{e^{3n}}\right)\end{aligned}$$

である。したがって、(1)より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{3n+1}{e^{3n}}=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(3\cdot\frac{n}{e^n}+\frac{1}{e^{3n}}\right)=0$$

であるから、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}b_n=\frac{4}{9}$$

となる。